N° D'ORDRE
5E.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE STRASBOURG

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PAR M. RENÉ THIRY,

Chargé d'un Cours à la Faculté des Sciences de Strasbourg.

1re THÈSE. — SUR LES SOLUTIONS MULTIPLES DES PROBLÈMES D'HYDRODYNAMIQUE RELATIFS AUX MOUVEMENTS GLISSANTS.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 6 juin 1921 devant la Commission d'Examen.

MM. BRILLOUIN, *Président.*
ESCLANGON, VILLAT, *Examinateurs.*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1921

N° D'ORDRE
5E.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE STRASBOURG

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. RENÉ THIRY,

Chargé d'un Cours à la Faculté des Sciences de Strasbourg.

1re THÈSE. — SUR LES SOLUTIONS MULTIPLES DES PROBLÈMES D'HYDRODYNAMIQUE RELATIFS AUX MOUVEMENTS GLISSANTS.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 6 juin 1921 devant la Commission d'Examen.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

MM. BRILLOUIN, *Président.*
ESCLANGON, } *Examinateurs.*
VILLAT, }

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

—

1921

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG.

FACULTÉ DES SCIENCES DE STRASBOURG.

	MM.	
Doyen	BATAILLON (E.)	Biologie générale.
Professeurs ...	DENJOY (A.)	Mathématiques générales.
	VALIRON (G.)	Calcul différentiel et intégral.
	VILLAT (H.)	Mécanique.
	FRÉCHET (M.)	Analyse supérieure.
	ESCLANGON (E.)	Astronomie.
	WEISS (P.)	Physique générale.
	OLLIVIER (H.)	Physique générale.
	ROTHÉ (E.)	Physique du Globe.
	MULLER (P.)	Chimie générale et Chimie physique.
	HACKSPILL (L.)	Chimie minérale.
	GAULT (H.)	Chimie organique.
	TOPSENT (E.)	Zoologie et Anatomie comparée.
	HOUARD (C.)	Botanique.
	TERROINE (E.)	Physiologie générale.
	DE LAPPARENT (J.)	Pétrographie.
	GIGNOUX (M.)	Géologie et Paléontologie.
Secrétaire	RENARD (A).	

65319 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS et Cie, Quai des Grands-Augustins, 55.

A

MONSIEUR HENRI VILLAT

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550001_0013

PREMIÈRE THÈSE

SUR LES SOLUTIONS MULTIPLES

DES

PROBLÈMES D'HYDRODYNAMIQUE

RELATIFS AUX MOUVEMENTS GLISSANTS.

INTRODUCTION.

Les recherches d'Hydrodynamique concernant les mouvements discontinus des fluides et les surfaces de glissement de Helmholtz, après être restées longtemps dans un état stationnaire, ont fait à la suite d'un important Mémoire de M. Levi-Civita (1) des progrès considérables. En particulier, les travaux de M. M. Brillouin et de M. H. Villat, pour ne citer que les plus importants, ont largement contribué à étendre le champ des mouvements discontinus connus (2). Si le problème consistant à étudier le mouvement permanent discontinu, uniforme à l'infini, d'un fluide parfait incompressible en présence d'un obstacle unique de forme quelconque reste encore à résoudre, les travaux précédents permettent néanmoins de réaliser de tels mouvements avec un obstacle dont la forme, calculée *a posteriori*, peut, par un choix convenable des paramètres se rapprocher d'une forme quelconque donnée à l'avance et présenter avec celle-ci des liens de

(1) *Scie e leggi di resistenza* (*Circ. mat. di Palermo*, 1907, p. 1).

(2) Pour la bibliographie de ces travaux, voir l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, édition française, t. IV, vol. 3, fasc. 2, et aussi l'article de M. VILLAT, *Quelques récents progrès des théories hydrodynamiques* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XLII, février-mars 1918). — *Voir* également APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, 3e édition, Chap. XXXVI, et aussi H. VILLAT, *Aperçus théoriques sur la résistance des fluides*, 1 vol. (*Collection Scientia*, Gauthier-Villars, 1921).

parenté aussi étroits que l'on veut. C'est dans cette voie surtout tendant à rapprocher de l'obstacle général que les méthodes de Helmholtz ont été le plus exploitées. Jusqu'aux travaux mentionnés plus haut, les mouvements connus se rapportaient seulement à des obstacles formés de segments rectilignes.

Les résultats trouvés n'ont pas été sans mettre en évidence de nombreuses singularités. Les premières furent signalées par M. M. Brillouin dans un Mémoire fondamental (1) et sont relatives à certaines impossibilités physiques rendant inacceptable la solution trouvée par l'analyse mathématique. On est, en effet, conduit quelquefois à des mouvements pour lesquels la pression en certaines régions devient négative; ou bien encore, il arrive que le domaine occupé par le fluide en mouvement se recouvre partiellement lui-même. Ces deux sortes d'impossibilités physiques sont très difficiles à déceler *a priori* et l'on en est réduit, dans la plupart des cas, à examiner après coup si la solution trouvée ne les comporte pas.

Enfin, dans un Mémoire plus récent (2), M. H. Villat a mis en évidence d'autres singularités, d'un caractère particulièrement troublant. Il a réussi en effet à construire, dans un cas simple, par une analyse poussée jusqu'à l'application numérique, deux solutions essentiellement distinctes, donnant deux mouvements, physiquement également possibles, autour du même obstacle, orienté de la même façon. Rien pour le moment ne peut conduire à préférer un mouvement à l'autre, et l'étude de leur stabilité, qui peut-être pourrait les départager, semble encore pour l'instant peu abordable.

Le but du présent travail est d'étudier de façon plus approfondie ces indéterminations signalées pour la première fois par M. Villat, de montrer qu'elles ne sont pas à proprement parler d'essence mathématique, mais qu'elles tiennent à la nature physique de la question et qu'on peut en multiplier les exemples à l'infini.

Pour cette étude, j'ai résolument quitté le point de vue des recherches mentionnées plus haut et je n'ai pas cherché à me rapprocher de

---

(1) *Les surfaces de glissement d'Helmholtz et la résistance des fluides* (*Ann. de Phys. et de Chim.*, t. XXIII, 1911, p. 145).

(2) *Sur la détermination des problèmes d'hydrodynamique relatifs à la résistance des fluides* (*Annales de l'École Normale*, 1914, p. 455).

l'obstacle de forme générale. Je me suis limité aux obstacles les plus simples formés de parois planes. Il est bien évident que les singularités mises ainsi en évidence se retrouveront, d'une façon plus ample encore sans doute, pour les obstacles courbes.

J'ai trouvé à cette limitation plusieurs avantages. Elle m'a permis tout d'abord de revenir aux méthodes directes de représentation conforme de Helmholtz-Kirchhoff sans passer par l'intermédiaire des variables de M. Levi-Civita et de M. Villat. L'introduction de ces variables, qui a conduit aux beaux résultats que l'on sait pour les obstacles courbes, masque néanmoins l'étroite dépendance qui existe entre le plan du fluide en mouvement et le plan de la variable Ω.

La méthode directe élimine aussi la première des difficultés de M. Brillouin et, avec elle, on est certain *a priori* d'après la façon même dont on construit le problème qu'il ne se présentera pas de pressions négatives.

Enfin, un dernier avantage, le plus important pour le but que je me proposais, est qu'il est possible d'atteindre par ce procédé des cas que les méthodes générales auraient été incapables d'obtenir, cas dans lesquels le fluide en mouvement forme soit un domaine simplement connexe s'appuyant à des parois solides réparties en *trois* segments sur la frontière, soit même un domaine doublement connexe.

Dans un premier Chapitre, je donne tout d'abord un exemple très simple où les indéterminations dont j'ai parlé plus haut se produisent et où le problème posé admet non pas *deux*, mais bien une *infinité* de solutions acceptables. Reprenant ensuite l'exemple même de M. Villat, je montre qu'il peut être largement étendu et que l'on peut aussi former dans ce cas une infinité de mouvements mathématiquement et physiquement possibles, formant une chaîne continue dont les deux solutions du Mémoire de M. Villat sont les extrêmes (¹).

Quelques pages sont ensuite consacrées à une explication d'ordre physique de ces indéterminations. Les lignes de glissement intermédiaires des exemples précédents, lignes qui paraissent arbitrairement

(¹) Du reste, cette infinité de solutions était implicitement comprise dans les calculs de M. H. Villat, mais l'auteur n'en avait montré la validité effective que pour les deux cas extrêmes.

introduites, se produiraient nécessairement si l'on ajoutait à l'obstacle primitif un petit segment de plan forçant la ligne de courant à se détacher de l'obstacle. Une remarque essentielle consiste dans le fait que la perturbation ainsi produite peut subsister, tout au moins pour certaines positions de l'obstacle perturbateur, lorsque l'on fait tendre celui-ci vers zéro.

Cette remarque me conduit naturellement à étudier de façon plus précise des mouvements pour lesquels une partie de l'obstacle est formée d'un segment de plan très petit. Ayant déjà, par les études précédentes des exemples où cette portion de plan fait partie de l'obstacle général, j'aborde le problème du mouvement d'un fluide autour de deux plans, non reliés entre eux, se présentant normalement à la direction générale du courant, me réservant d'approfondir plus spécialement le cas où l'un de ces plans est petit par rapport à l'autre.

A priori, trois configurations sont possibles pour les lignes de discontinuité quittant de tels obstacles :

1° Les sillages (1) peuvent être illimités à l'arrière de chaque plan ;

2° Les lignes de jet de l'un des plans peuvent se raccorder de chaque côté avec l'autre plan ;

3° Enfin il peut se faire que le sillage de l'un des plans se ferme, l'autre restant illimité.

Je montre que les deux premières configurations sont exceptionnelles, qu'elles ne peuvent se présenter que pour des dispositions particulières des obstacles et qu'au contraire seule la troisième est générale.

Enfin je déduis de cette étude, par des passages à la limite appropriés, de nouvelles indéterminations hydrodynamiques, et j'ai l'occasion de faire sur les différents cas mentionnés des remarques intéressantes sur la pression totale que supportent les obstacles.

Je tiens, en terminant l'Introduction de ce travail, à exprimer toute ma reconnaissance aux Maîtres qui ont bien voulu s'y intéresser et

(1) J'emploie le mot *sillage* devenu presque classique dans cette théorie, pour éviter une périphrase et parce qu'il fait image, mais il est évident qu'il faut se garder d'une assimilation trop grande avec les sillages naturels.

d'une façon toute particulière à M. H. Villat qui m'en a donné la première idée et dont les conseils amicaux me furent toujours si précieux.

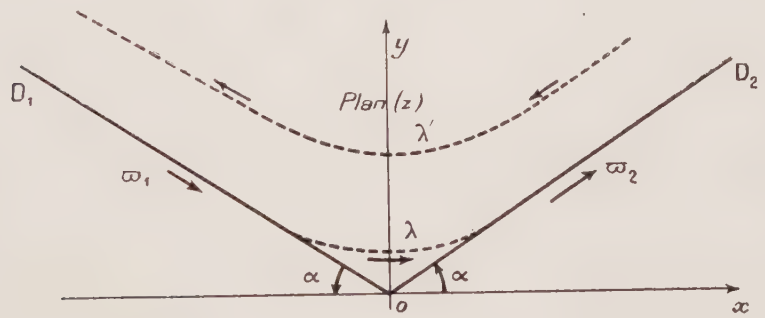
PREMIÈRE PARTIE.

I. — Étude d'un cas simple de mouvement glissant indéterminé.

Le but du présent Chapitre est de mettre en évidence une forme très simple de mouvement ayant les mêmes particularités que celui étudié par M. Villat et admettant, lui aussi, une infinité continue de solutions.

Nous supposerons qu'une veine fluide, partant de l'infini et y retournant, s'appuie à sa droite contre une paroi composée de deux demi-plans indéfinis OD_1 et OD_2 formant un angle rentrant en O, cette veine étant limitée à sa gauche par une surface libre λ' (*fig.* 1). Nous

Fig. 1 (1).



pouvons supposer que le courant épouse complètement la forme de la paroi, ou, au contraire, qu'il laisse dans l'angle une plage de fluide inerte séparé du fluide en mouvement par une ligne de discontinuité λ.

(1) Dans toutes les figures de ce travail, les flèches ne se rapportent jamais à la direction du courant fluide, elles indiquent le sens de parcours sur chaque frontière, de façon à bien préciser la correspondance d'un plan à l'autre.

C'est ce dernier cas que nous traiterons seul, un passage à la limite nous permettra de retrouver le premier.

Nous rapporterons le plan (z) du fluide en mouvement à des axes rectangulaires ayant leur origine en O, Oy étant bissectrice intérieure de l'angle des plans, et nous appellerons α l'angle d'inclinaison de ces plans sur $Ox\left(o < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. Nous supposerons la densité du fluide et la vitesse à l'infini égales à l'unité et nous appellerons c la largeur supposée donnée de la veine fluide à l'infini au départ. On sait que tout le long de la ligne λ' la vitesse devra être constante et par suite égale à un, que le long de la ligne λ elle devra également être constante et posséder une valeur inférieure à la précédente, de façon que la pression ne risque pas de devenir négative dans le fluide en mouvement. Nous appellerons cette valeur e^{-a} $(a > o)$.

Suivant une méthode classique, nous introduirons le potentiel des vitesses φ et la fonction de courant ψ. En posant $z = x + iy$ et $f = \varphi + i\psi$, la fonction f sera une fonction analytique de z, régulière dans la région occupée par le fluide en mouvement. Enfin, en appelant u et v les composantes de la vitesse en chaque point du fluide et V la grandeur de cette vitesse, nous poserons

$$w = u - iv = \frac{df}{dz} = e^{-i\Omega} = e^{-i(\Theta + iT)}.$$

La fonction Ω est alors une fonction analytique uniforme de z ou de f, régulière dans le domaine en question, et la connaissance de cette fonction suffit pour déterminer tous les éléments du mouvement.

Θ représente l'angle que fait avec Ox la vitesse de la particule du fluide qui a pour affixe z et T est égal au logarithme népérien de la grandeur de cette vitesse.

On devra donc avoir :

$$\begin{aligned} &\text{sur } \varpi_1, \quad \Theta = -\alpha; \qquad \text{sur } \lambda', \quad T = o; \\ &\text{sur } \varpi_2, \quad \Theta = +\alpha; \qquad \text{sur } \lambda, \quad T = -a, \end{aligned}$$

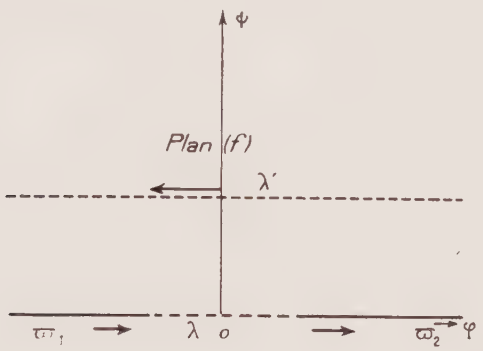
et ces conditions aux limites suffisent pour déterminer complètement a fonction Ω.

Nous représenterons également par des points dans des plans séparés es imaginaires f et Ω. Au domaine du fluide en mouvement dans le

plan (z) correspond d'une façon conforme un domaine dans le plan (f) et un domaine dans le plan (Ω).

Le domaine du plan (f) sera formé d'une bande horizontale de largeur c et nous pourrons supposer, puisque φ et ψ ne sont déterminés qu'à des constantes près, que les extrémités du segment de droite correspondant à la ligne λ sont sur $O\psi$ et ont des abscisses opposées.

Fig. 2.



Le domaine (Ω) se détermine immédiatement, il est formé d'un rectangle compris entre les droites $\Theta = \pm\alpha$, $T = o$ et $T = -a$, et l'application conforme de ce domaine sur le domaine (f) ferait connaître Ω en fonction de f et par suite résoudrait tout le problème.

Or, la solution de ce problème est classique puisqu'il s'agit d'aires limitées par des polygones rectilignes et résulte de l'application répétée d'une formule donnée par Schwarz réalisant la représentation conforme d'une telle aire sur un demi-plan (¹).

Tout d'abord, la transformation $f = \frac{c}{\pi} \mathrm{L}t$ (où le logarithme a la détermination réelle pour t réel et positif) fait correspondre au domaine (f) le demi-plan supérieur d'une variable auxiliaire t, suivant la disposition indiquée par la figure 3. Dans tout ce qui suit, les domaines sont toujours à la gauche du sens de parcours indiqué par des flèches. Les extrémités de la ligne correspondant à λ ont

(¹) Pour tout ce qui concerne la formule de Schwarz et ses généralisations, dont je me servirai largement au cours de ce travail, *voir* le Mémoire de Schläfli (*Journal de Crelle*, t. 78, p. 63).

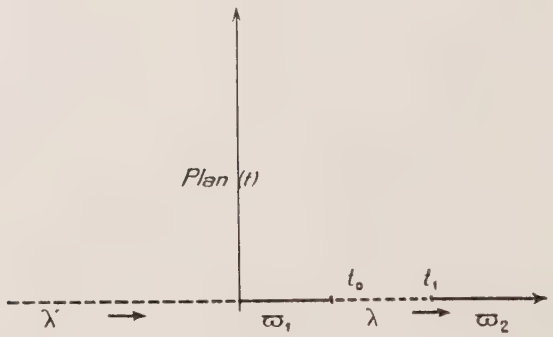
des abscisses t_0 et t_1 liées par la relation $t_0 t_1 = 1$ avec $0 < t_0 < 1 < t_1$.

De même, la formule de Schwarz

$$\Omega = -iH \int_t^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t(t-t_0)(t-t_1)}} + \alpha \qquad (1)$$

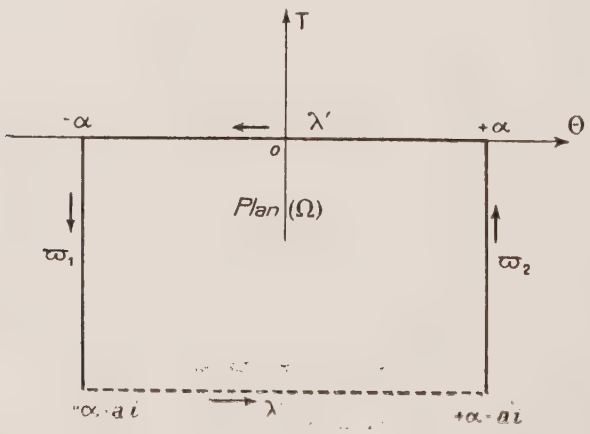
assurera la représentation conforme du domaine (Ω) sur ce même demi-plan.

Fig. 3.



Dans cette intégrale, le radical a la détermination positive pour t réel, positif et très grand et la constante H est réelle et positive.

Fig. 4.



Ω se calcule immédiatement au moyen des fonctions elliptiques; en faisant le changement de variable

$$t = 4u + \frac{t_0 + t_1}{3},$$

on a en effet

$$\Omega = -iH\int_u^\infty \frac{du}{\sqrt{4(u-e_1)(u-e_2)(u-e_3)}} + \alpha$$

en posant

$$e_1 = -\frac{t_0+t_1}{12} + \frac{t_1}{4}, \qquad e_2 = -\frac{t_0+t_1}{12} + \frac{t_0}{4}, \qquad e_3 = -\frac{t_0+t_1}{12}$$

et la substitution $u = \wp Z$ permet de réaliser la représentation conforme au moyen des deux formules suivantes :

$$(2) \qquad \begin{cases} t = 4(\wp Z - e_3), \\ \Omega = -iHZ + \alpha. \end{cases}$$

Les quantités e_1, e_2, e_3 qui caractérisent la fonction $\wp Z$ introduite ne sont pas quelconques, elles satisfont tout d'abord à la relation classique $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ et en plus à la relation

$$(e_1 - e_3)(e_2 - e_3) = \frac{1}{16}$$

qui exprime que l'on a $t_0 t_1 = 1$.

Pour satisfaire à cette condition, on pourra se donner le module τ des fonctions elliptiques, et la période ω_1 se trouvera déterminée par l'équation

$$\omega_1 = \pi \vartheta_3(0)\vartheta_2(0)$$

équivalente à la relation en question (*voir* Tannery et Molk, t. II, form. XXXVI$_5$) (¹).

En résumé, la donnée du seul module τ équivaut donc à celle des deux inverses t_0 et t_1.

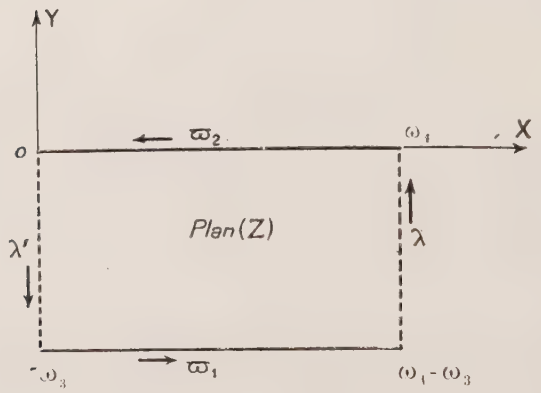
Quand le point (Ω) décrit la frontière de son domaine en en laissant l'aire à sa gauche, le point (Z) décrit le rectangle des demi-périodes 0, $-\omega_3$, $\omega_1 - \omega_3$, $+\omega_1$, 0 dans les mêmes conditions. Ce rectangle forme donc un nouveau domaine qui correspond encore de façon conforme à tous ceux que nous avons déjà introduits.

(¹) Je représenterai par la notation T. et M. l'Ouvrage de Tannery et Molk sur les *Fonctions elliptiques* et j'en adopterai les notations.

Il reste à déterminer les constantes de façon qu'effectivement le rectangle du plan (Ω) ait la position et les dimensions indiquées par la figure 4. Ceci se traduit par les équations ci-dessous :

$$\Omega(0) = \alpha,$$
$$\Omega(\omega_1) = \alpha - a\,i,$$
$$\Omega(\omega_1 - \omega_3) = -\alpha - a\,i,$$
$$\Omega(-\omega_3) = -\alpha.$$

Fig. 5.



La première de ces équations est satisfaite d'elle-même, les autres se réduisent à deux et donnent

$$\text{II} \quad \frac{2\alpha i}{\omega_3}, \qquad a = \frac{2\alpha i}{\tau},$$

et cette dernière quantité est bien positive.

On a alors

$$\Omega(Z) = \frac{2\alpha Z}{\omega_3} + \alpha. \tag{3}$$

D'autre part,

$$df = \frac{c}{\pi}\frac{dt}{t} = \frac{c}{\pi}\frac{p'Z}{pZ - e_3}\,dZ; \tag{4}$$

d'où enfin

$$dz = e^{i\Omega}\,df = \frac{c}{\pi}e^{i\alpha}e^{\frac{2i\alpha Z}{\omega_3}}\frac{p'Z}{pZ - e_3}\,dZ. \tag{5}$$

Il est facile de mettre en évidence sur cette formule qui résout entièrement le problème posé, une propriété remarquable de symétrie.

Considérons en effet deux points du plan (Z) symétriques par rapport à la droite $Y = -\frac{\omega_3}{2i}$, ces points correspondront à des valeurs de Z de la forme

$$Z = X + iY \qquad \text{et} \qquad Z_1 = X - iY - \omega_3.$$

Dans le plan (z) il leur correspondra deux points z et z_1 et il est facile de vérifier que les déplacements dz et dz_1 seront symétriques par rapport à Oy.

En effet, on aura

$$dz_1 = dx_1 + i\,dy_1 = \frac{c}{\pi} e^{i\alpha} e^{\frac{2i\alpha Z_1}{\omega_3}} \frac{\wp' Z_1}{\wp Z_1 - e_3}\, dZ_1$$

en changeant i en $-i$ (et par suite ω_3 en $-\omega_3$), Z_1 devient $Z + \omega_3$ et l'on a

$$dx_1 - i\,dy_1 = \frac{c}{\pi} e^{i\alpha} e^{\frac{2i\alpha Z}{\omega_3}} \frac{\wp'(Z+\omega_3)}{\wp(Z+\omega_3) - e_3}\, dZ,$$

c'est-à-dire

$$dx_1 - i\,dy_1 = -(dx + i\,dy),$$

car en dérivant logarithmiquement la formule classique

$$(\wp Z - e_3)[\wp(Z+\omega_3) - e_3] = (e_1 - e_3)(e_2 - e_3),$$

on voit de suite que

$$\frac{\wp'(Z+\omega_3)}{\wp(Z+\omega_3) - e_3} = -\frac{\wp' Z}{\wp Z - e_3}.$$

On en déduit immédiatement que toute la figure du plan (z) présente une symétrie géométrique par rapport à Oy. Cette symétrie ne se poursuit évidemment pas dans le domaine hydrodynamique, puisque, en deux points symétriques, le vecteur vitesse, tout en ayant la même grandeur, fait avec Ox (et non avec Oy) des angles opposés (hémisymétrie).

Bien que l'intégration de dz ne puisse pas s'effectuer au moyen des transcendantes classiques, il serait néanmoins très facile de déterminer de façon précise la forme et les éléments géométriques des courbes λ et λ'. Je n'insiste pas davantage sur ce point particulier.

En résumé, nous sommes ici en présence d'une infinité continue de solutions, puisque le module τ des fonctions elliptiques introduites reste arbitraire. Dans ces diverses solutions, la plage de fluide inerte

pourra avoir une étendue quelconque partant de valeurs considérables pour τ très grand, pour se réduire à zéro quand τ devient très petit.

Considérons plus spécialement ce dernier cas, qui correspond à la seconde hypothèse que nous pouvions faire en mettant le problème en équation.

Ce cas s'obtiendra en supposant que la ligne λ se réduit à zéro, c'est-à-dire que t_0 et t_1 se rapprochent de l'unité. A la limite, nous aurons pour les quantités e_1, e_2, e_3 les valeurs

$$e_1 = e_2 = \frac{1}{12}, \qquad e_3 = -\frac{1}{6}.$$

D'après les formules de dégénérescence des fonctions elliptiques, on aura dans ce cas

$$\omega_1 = \infty, \qquad \omega_3 = \pi i,$$

et la fonction $\wp Z$ se réduit à

$$\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{Z}{2}}\right].$$

Un calcul facile donne alors pour dz l'expression

$$dz = -2\frac{c}{\pi} e^{i\alpha} \frac{e^{\frac{2\alpha Z}{\pi}}}{\operatorname{sh} Z} dZ. \tag{6}$$

Même dans ce cas particulier, l'intégration finie ne serait possible que pour des valeurs rationnelles du rapport $\frac{\alpha}{\pi}$.

En posant $Z = -\frac{\pi i}{2} + i\rho$ (ρ variant de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$), on obtiendra les équations paramétriques de la ligne libre sous la forme

$$\begin{cases} dx = 2\dfrac{c}{\pi}\dfrac{\cos k\rho}{\cos\rho} d\rho \\ dy = 2\dfrac{c}{\pi}\dfrac{\sin k\rho}{\cos\rho} d\rho \end{cases} \qquad \left(k = \frac{2\alpha}{\pi}\right) \tag{7}$$

qui permettrait facilement son étude complète (¹).

(¹) Ce dernier cas limite rentre dans une étude plus générale faite par M. G. Colonnetti (*Rendiconti del Circolo di Palermo*, t. XXXII, 1911, p. 51-87). De même, le cas général

II. — Étude du cas d'indétermination signalé par M. H. Villat.

Comme je l'ai rappelé dans l'Introduction du présent travail, M. H. Villat a donné le premier exemple de mouvement plan discontinu d'un fluide susceptible d'admettre deux solutions. Je ne crois pas inutile d'en reprendre les calculs par une méthode différente, l'exposition s'en trouvera un peu simplifiée et j'aurai aussi l'occasion de faire quelques remarques intéressantes.

M. Villat examine le mouvement plan d'un fluide illimité (mouvement uniforme et de vitesse égale à 1 à l'infini), rencontrant un obstacle formé de deux lames planes réunies en un angle tournant sa partie concave vers le courant (¹).

Il existe alors une ligne de courant qui, venant de l'infini, se divise en un point O de l'obstacle de façon à l'entourer des deux côtés. Les lignes de courant provenant de cette bifurcation peuvent épouser de façon complète la forme de l'obstacle pour ne le quitter qu'aux extrémités (en suivant les trajets $\varpi_1\varpi'\lambda_1$ et $\varpi_2\lambda_2$), ou bien, au contraire, quitter l'obstacle momentanément au voisinage du sommet pour laisser dans l'angle une plage de fluide inerte (en suivant les trajets $\varpi_1\lambda\varpi'\lambda_1$ et $\varpi_2\lambda_2$) (*fig.* 6).

Telles sont les deux hypothèses qui, étudiées jusqu'au bout, ont donné à M. Villat les deux solutions distinctes du même problème.

Étudions plus spécialement la seconde hypothèse. Nous supposerons le plan du fluide en mouvement rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires, ayant leur origine en O, l'axe des x étant parallèle à la vitesse du fluide à l'infini et dirigé dans le même sens.

---

que nous avons traité pourrait être déduit comme cas limite de résultats obtenus par B. Caldonazzo (*Annali di Mat. pura ed applicata*, t. XXV, 1916, p. 33-98). Ces deux études ne partent du reste pas du même point de vue que la nôtre et ne visent nullement les indéterminations.

(¹) Dans toutes les questions qui suivront, le courant vient toujours de la gauche, horizontalement.

J'appellerai A et B les angles (compris entre o et π, $B > A$) que font respectivement les deux lames de l'obstacle avec Ox (¹).

Comme nous l'avons fait dans le Chapitre précédent, nous intro-

Fig. 6.

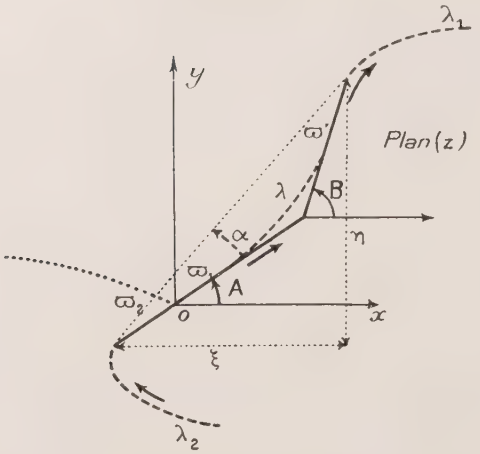
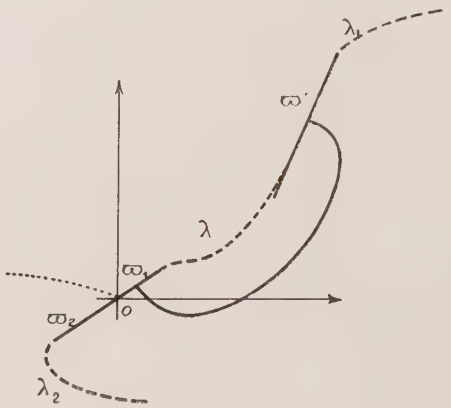
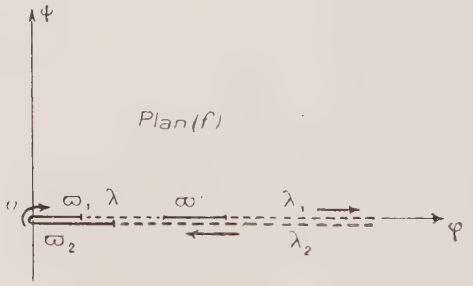


Fig. 6 *bis*.



duirons les fonctions f et Ω et les domaines correspondants. Nous supposerons que f, qui n'est déterminé qu'à une constante près, s'annule pour $z = 0$; le domaine du plan (f) sera, alors, particulièrement simple, il se composera de la totalité du plan entaillé par une

Fig. 7.



coupure le long de la partie positive de l'axe des φ, et lorsque le point (z) du plan du fluide décrira le contour $\lambda_2 \varpi_2 \varpi_1 \lambda \varpi' \lambda_1$, le point (f)

(¹) Les notations ainsi introduites diffèrent un peu de celles du Mémoire de M. Villat pour retrouver ces dernières, il suffirait de poser

$$A = \pi - \alpha - \delta, \qquad B = \alpha - \delta.$$

parcourra dans son plan le bord inférieur, puis le bord supérieur de la coupure (parcours indiqués par des flèches).

D'autre part, le long des lignes de glissement λ_1 et λ_2, la vitesse devra être constante et égale à l'unité, le long de la ligne λ elle devra être également constante et rester inférieure à l'unité; nous représenterons sa valeur sur cette ligne par $e^{-a}(a > 0)$.

Il s'ensuit que la fonction Ω devra satisfaire aux conditions aux limites suivantes, qui suffisent pour la déterminer.

On devra avoir :

$$\begin{array}{llll} \text{sur } \varpi_1, & \Theta = A; & \text{sur } \lambda_1, & T = 0; \\ \text{sur } \varpi_2, & \Theta = A - \pi; & \text{sur } \lambda_2, & T = 0; \\ \text{sur } \varpi', & \Theta = B; & \text{sur } \lambda, & T = -a. \end{array}$$

Le domaine (Ω) est alors facile à déterminer : lorsque le point (z) parcourt sa frontière, alternativement les valeurs de Θ et de T restent constantes, et, par suite, le point (Ω) décrit un contour rectiligne formé de parallèles aux axes de coordonnées.

Les parties de ce contour correspondant à λ_2, ϖ_2, ϖ', λ_1 ne peuvent être parcourues par le point (Ω) que dans un sens (le domaine devant toujours être à la gauche du sens de déplacement indiqué par des flèches) (1); au contraire, les parties correspondant à ϖ_1 et à λ peuvent très bien se prolonger l'une *ou* l'autre à l'intérieur du domaine en y formant une sorte de coupure, comme le montrent les figures 8 et 8 *bis*. La seule condition imposée à cette coupure est de ne pas arriver à morceler le domaine. Dans le premier de ces deux cas (*fig.* 8), la vitesse passe sur le segment ϖ_1 par un maximum relatif et la ligne λ ne présente pas d'inflexion; dans le second cas, au contraire, la vitesse varie d'une façon régulière sur le segment ϖ_1 et la ligne λ présente un point d'inflexion (*fig.* 8 *bis*). Pour le problème qui nous occupe, seules les configurations non inflexionnelles sont possibles, puisque le long de la ligne λ, après avoir quitté le segment ϖ_1, la valeur de Θ doit commencer par croître. Néanmoins, pour des raisons qui apparaîtront par la suite, nous ne ferons pas, pour le moment, de

(1) Nous aurons l'occasion de revenir, à la fin de ce travail, sur cette affirmation, pour la préciser davantage.

distinction entre ces deux cas possibles et nous les étudierons simultanément, nous réservant de revenir plus tard sur ce point particulier (¹).

Ceci posé, comme les domaines (f) et (Ω) nous sont tous deux complètement connus (²), il est très facile de réaliser la représen-

Fig. 8.

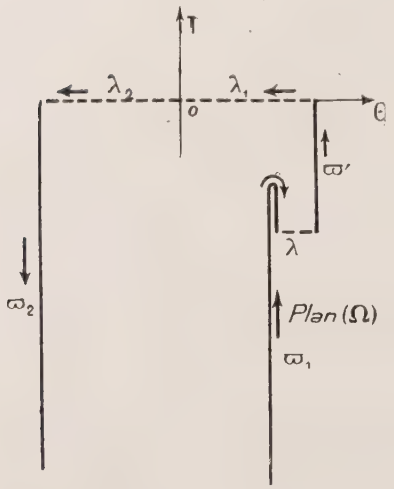
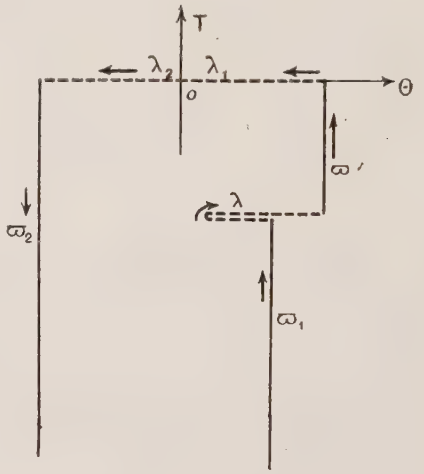


Fig. 8 *bis*.



tation conforme de l'un sur l'autre, c'est-à-dire de déterminer Ω en fonction de f, et l'intégration de l'équation

$$dz = e^{i\Omega}\, df$$

nous permettra d'en déduire tout ce qui se rapporte au domaine partiellement inconnu du plan (z).

Tout d'abord, la transformation $f = t^2$ réalise l'application conforme du domaine (f) sur le demi-plan supérieur d'une variable auxiliaire t

---

(¹) Des configurations inflexionnelles ont été étudiées aussi par M. Villat, mais dans le cas particulier où elles pouvaient *seules* se présenter, d'un obstacle analogue à celui que nous considérons, tournant sa pointe *vers* le courant (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1915, p. 375-404). Ce cas, dont je ne m'occuperai pas dans le présent travail, correspondrait à l'hypothèse $B < A$.

(²) Remarquons que c'est l'hypothèse des obstacles plans qui fait que nous connaissons complètement le domaine (Ω).

et la transformation

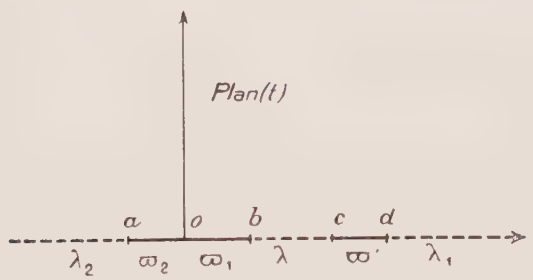
$$\Omega = -K \int_{\infty}^{t} \frac{(t-\beta)\,dt}{t\sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)(t-d)}} \tag{8}$$

réalise l'application conforme du domaine (Ω) sur ce même demi-plan.

La fonction Ω devant être réelle et décroissante pour les grandes valeurs réelles de t, on voit immédiatement que la constante K est réelle et positive, si l'on convient, comme nous le ferons par la suite, de prendre pour le radical la détermination qui est positive pour ces grandes valeurs de t.

Calcul de l'intégrale Ω. — Il faut, maintenant, déterminer les constantes K, a, β, b, c, d de telle façon que le point (Ω) décrive exactement le contour donné quand le point (t) décrira l'axe réel de son

Fig. 9.



plan. [Les cinq dernières constantes doivent se succéder en croissant dans l'ordre où elles sont écrites ou dans l'ordre a, b, β, c, d, suivant que l'on prend l'une ou l'autre des dispositions possibles pour le domaine (Ω).]

Dans ce but, nous commencerons par effectuer l'intégrale Ω au moyen des fonctions elliptiques.

Le procédé de calcul de telles intégrales est classique, il consiste à faire le changement de variable

$$t = \frac{1}{2}\,\frac{p'Z' - p'\gamma'}{pZ' - p\gamma'} + \frac{S_1}{4} \tag{9}$$

avec $S_1 = a + b + c + d$ et γ' réel et compris entre o et $2\omega_1$, les périodes des fonctions elliptiques introduites étant telles que ω_1 et $\frac{\omega_3}{i}$ soient des quantités réelles et positives.

On sait alors que, dans ces conditions, la donnée des quatre quantités ω_1, ω_3, S_1, γ' est entièrement équivalente à celle des quatre nombres a, b, c, d (*voir*, par exemple, pour ce point de détail, le Mémoire de M. Villat, p. 466).

Pour la commodité des calculs ultérieurs, nous ferons tout de suite le changement de variable suivant :

$$Z' = -Z + \frac{\gamma}{2}, \qquad \gamma' = 2\omega_1 - \gamma;$$

autrement dit, nous poserons

$$t = \frac{1}{2}\frac{\wp'\left(Z - \frac{\gamma}{2}\right) - \wp'\gamma}{\wp\left(Z - \frac{\gamma}{2}\right) - \wp\gamma} + \frac{S_1}{4}, \tag{10}$$

ce qui a pour conséquence (*voir*, par exemple, Appell et Lacour, *Fonctions elliptiques*, p. 158)

$$\frac{dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)(t-d)}} = -dZ.$$

Si l'on pose pour un moment

$$F(Z) = \frac{1}{2}\frac{\wp'\left(Z - \frac{\gamma}{2}\right) - \wp'\gamma}{\wp\left(Z - \frac{\gamma}{2}\right) - \wp\gamma}, \tag{11}$$

on peut encore écrire cette fonction sous les deux formes suivantes :

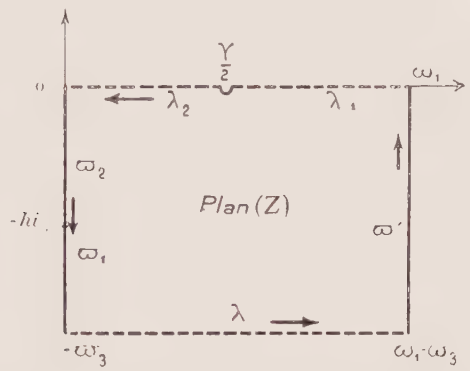
$$\begin{aligned} F(Z) &= \zeta\left(Z + \frac{\gamma}{2}\right) - \zeta\left(Z - \frac{\gamma}{2}\right) - \zeta\gamma \\ &= -\frac{\wp'\frac{\gamma}{2}}{\wp Z - \wp\frac{\gamma}{2}} + 2\zeta\frac{\gamma}{2} - \zeta\gamma, \end{aligned} \tag{11 bis}$$

ce qui nous montre que $F(Z)$ est une fonction homographique de $\wp Z$,

sans cesse décroissante lorsque $\wp Z$ varie par valeurs réelles croissantes.

Si le point (Z) décrit donc le rectangle des demi-périodes : o, $-\omega_3$, $-\omega_3+\omega_1$, ω_1, o, $\wp(Z)$ et t varieront par valeurs réelles croissantes. Il s'ensuit, alors, que l'intérieur du rectangle du plan (Z)

Fig. 10.



correspondra, de façon conforme, au demi-plan supérieur (t), puisque leurs aires sont simultanément à la gauche du déplacement des mobiles.

Nous pourrons, ainsi, établir le Tableau de correspondance suivant :

(12)

Z	$-\varepsilon i$		Z_1	$-\omega_3$		$-\omega_3+\omega_1$	ω_1	$\frac{\gamma}{2}$		o
$\wp Z$	$-\infty$	↗		e_3	↗	e_2	↗	e_1	↗ $\wp\frac{\gamma}{2}$	↗ $+\infty$
F(Z)		↘	$\frac{S_1}{4}$		↘			$+\infty$	↘	
								$-\infty$		
t	a	↗	o	↗	b	↗	c	↗ d	$+\infty$ ↗	a
									$-\infty$	

et l'on voit immédiatement, sur ce Tableau, qu'au point $t=0$ correspond, pour F, la valeur $\frac{S_1}{4}$, et, pour Z, un point Z_1 du segment o, $-\omega_3$; de même au point $t=\beta$, qui est compris entre o et c correspond, pour F, la valeur $\frac{S_1}{4}-\beta$, et, pour Z, un point Z_2 situé, soit sur le segment Z_1, $-\omega_3$, soit sur le segment $-\omega_3$, $-\omega_3+\omega_1$.

Avec ces notations, l'intégrale à calculer prend la forme

$$\Omega = K \int_{\frac{\gamma}{2}}^{Z} \frac{F(Z) - F(Z_2)}{F(Z) - F(Z_1)}\, dZ. \tag{13}$$

Or, on peut facilement transformer la fonction sous le signe d'intégration ; on a, en effet, en se servant des expressions données plus haut pour F(Z),

$$\begin{aligned} F(Z) - F(Z_2) &= \frac{\wp'\frac{\gamma}{2}}{\wp Z_2 - \wp\frac{\gamma}{2}} - \frac{\wp'\frac{\gamma}{2}}{\wp Z - \wp\frac{\gamma}{2}} \\ &= \frac{\wp'\frac{\gamma}{2}}{\wp Z_2 - \wp\frac{\gamma}{2}} \times \frac{\wp Z - \wp Z_2}{\wp Z - \wp\frac{\gamma}{2}}, \end{aligned}$$

de même

$$F(Z) - F(Z_1) = \frac{\wp'\frac{\gamma}{2}}{\wp Z_1 - \wp\frac{\gamma}{2}} \times \frac{\wp Z - \wp Z_1}{\wp Z - \wp\frac{\gamma}{2}};$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{F(Z) - F(Z_2)}{F(Z) - F(Z_1)} &= \frac{\wp Z_1 - \wp\frac{\gamma}{2}}{\wp Z_2 - \wp\frac{\gamma}{2}} \times \frac{\wp Z - \wp Z_2}{\wp Z - \wp Z_1} \\ &= \frac{\wp Z_1 - \wp\frac{\gamma}{2}}{\wp Z_2 - \wp\frac{\gamma}{2}} \times \frac{\wp Z_2 - \wp Z_1}{\wp' Z_1} \\ &\quad \times [\ \zeta(Z + Z_1) - \zeta(Z - Z_1) \\ &\quad - \zeta(Z_2 + Z_1) + \zeta(Z_2 - Z_1)], \end{aligned}$$

d'où enfin

$$\Omega = K \frac{\wp Z_1 - \wp\frac{\gamma}{2}}{\wp Z_2 - \wp\frac{\gamma}{2}} \times \frac{\wp Z_2 - \wp Z_1}{\wp' Z_1} \left\{ L \frac{\sigma(Z + Z_1)}{\sigma(Z - Z_1)} - [\zeta(Z_2 + Z_1) - \zeta(Z_2 - Z_1)]Z \right\}_{\frac{\gamma}{2}}^{Z},$$

$$\Omega = H \left\{ L \frac{\sigma(Z_1 + Z)}{\sigma(Z_1 - Z)} - [\zeta(Z_2 + Z_1) - \zeta(Z_2 - Z_1)]Z - P \right\}, \tag{13 bis}$$

en posant

$$H = K\,\frac{pZ_1 - p\frac{\gamma}{2}}{pZ_2 - p\frac{\gamma}{2}} \times \frac{pZ_2 - pZ_1}{p'Z_1}$$

et

$$P = L\,\frac{\sigma\left(Z_1 + \frac{\gamma}{2}\right)}{\sigma\left(Z_1 - \frac{\gamma}{2}\right)} - [\zeta(Z_2 + Z_1) - \zeta(Z_2 - Z_1)]\frac{\gamma}{2}.$$

La constante H est, alors, une constante imaginaire pure, à coefficient de i négatif qui, dans la suite, remplacera la constante K.

Étude sommaire de la fonction logarithmique entrant dans l'expression de Ω. — Dans un certain nombre des questions que nous traiterons, nous aurons l'occasion de rencontrer des fonctions de la forme

$$F_i(Z) = L\,\frac{\sigma(Z_i + Z)}{\sigma(Z_i - Z)} \qquad [\textit{par convention } F_i(0) = 0], \tag{14}$$

dans lesquelles l'imaginaire Z_i est l'affixe d'un point situé sur un des côtés du rectangle des demi-périodes. Nous représenterons ainsi par F_i l'ensemble des quatre fonctions possibles, en convenant de poser

$$Z_1 = \mu_1\omega_1, \qquad Z_2 = \omega_1 + \mu_2\omega_3, \qquad Z_3 = \omega_3 + \mu_3\omega_1, \qquad Z_4 = \mu_4\omega_3,$$

les quantités μ étant comprises entre 0 et 1.

Nous aurons besoin de savoir, en particulier, quelles valeurs prennent ces différentes fonctions aux points ω_1, $\omega_1 \pm \omega_3$, $\pm\omega_3$. Pour cela, nous considérerons le domaine formé par le rectangle des demi-périodes et son symétrique par rapport à l'axe réel, nous y tracerons une coupure rectiligne allant du point Z_1 au point ω_1 et nous isolerons du domaine les points Z_i et leurs conjugués par de petits contours circulaires, la coupure n'étant, du reste, essentielle que pour la fonction F_1.

Dans le domaine ainsi formé, les quatre fonctions F_i sont régulières et uniformes. Voici, sous forme de Tableau, les valeurs prises par elles :

Parallélogramme supérieur :

(15)

Z	εi	ω_3	$\omega_1+\omega_3$	ω_1	ε
F_1	0	$2\eta_3 Z_1+i\pi$	$2(\eta_3+\eta_1)Z_1+i\pi$	$2\eta_1 Z_1+i\pi$	0
F_2	0	$2\eta_3 Z_2+i\pi$	$2(\eta_3+\eta_1)Z_2+i\pi$	$2\eta_1 Z_2-i\pi$	0
F_3	0	$2\eta_3 Z_3+i\pi$	$2(\eta_3+\eta_1)Z_3-i\pi$	$2\eta_1 Z_3-i\pi$	0
F_4	0	$2\eta_3 Z_4-i\pi$	$2(\eta_3+\eta_1)Z_4-i\pi$	$2\eta_1 Z_4-i\pi$	0

Parallélogramme inférieur :

(15 *bis*)

Z	$-\varepsilon i$	$-\omega_3$	$\omega_1-\omega_3$	ω_1	ε
F_1	0	$-2\eta_3 Z_1-i\pi$	$2(-\eta_3+\eta_1)Z_1-i\pi$	$2\eta_1 Z_1-i\pi$	0
F_2	0	$-2\eta_3 Z_2-i\pi$	$2(-\eta_3+\eta_1)Z_2-i\pi$	$2\eta_1 Z_2-i\pi$	0
F_3	0	$2\eta_3 Z_3-i\pi$	$2(-\eta_3+\eta_1)Z_3-i\pi$	$2\eta_1 Z_3-i\pi$	0
F_4	0	$-2\eta_3 Z_4-i\pi$	$2(-\eta_3+\eta_1)Z_4-i\pi$	$2\eta_1 Z_4-i\pi$	0

J'indique très rapidement la marche suivie pour établir ce Tableau. On commence par étudier la fonction F_1 dans le rectangle supérieur et l'on en déduit les valeurs qu'elle prend aux sommets du rectangle inférieur. Un changement de variable de la forme $Z = Z' - \omega_3$ permet de passer à une fonction du type F_3 ; enfin, un échange du rôle des périodes donne des fonctions des types F_2 et F_4. Quant à l'étude de la fonction F_1 dans le rectangle supérieur, elle se fait sans difficulté en passant aux fonctions $\Im$ et en se servant des représentations conformes classiques que donnent de ce rectangle les transformations $u = \Im_i \wp$.

Détermination des constantes entrant dans Ω. — Revenons à notre fonction Ω donnée par la formule (13 *bis*).

On doit avoir

$$\begin{aligned}
&\Omega = A - \pi \qquad \text{pour} \qquad Z = 0,\\
&\Omega = A - a i \qquad \text{pour} \qquad Z = -\omega_3,\\
&\Omega = B - a i \qquad \text{pour} \qquad Z = -\omega_3 + \omega_1,\\
&\Omega = B \qquad \text{pour} \qquad Z = \omega_1,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
H\{ \quad & \quad & & -P\{ = A - \pi,\\
H\{ \quad & -2\eta_3 Z_1 + i\pi + [\zeta(Z_2+Z_1) - \zeta(Z_2-Z_1)]\omega_3 & & -P\{ = A - a i,\\
H\{ \quad & -2(\eta_3+\eta_1)Z_1 + i\pi + [\zeta(Z_2+Z_1) - \zeta(Z_2-Z_1)](\omega_3-\omega_1) & & P\{ = B - a i,\\
H\{ \quad & 2\eta_1 Z_1 + i\pi - [\zeta(Z_2+Z_1) - \zeta(Z_2-Z_1)]\omega_1 & & -P\{ = B.
\end{aligned}$$

Ces équations (qui paraissent être au nombre de huit, puisqu'il s'agit de quantités imaginaires) ne sont pas indépendantes et se réduisent à quatre. En faisant, tout d'abord, la somme de la première et de la troisième, celle de la deuxième et de la quatrième et en les comparant, on obtient immédiatement $H = -i$. La troisième peut, alors, être supprimée, et les autres s'écrivent :

$$\begin{aligned}
&iP = A - \pi,\\
-i\{ \quad & -2\eta_3 Z_1 + [\zeta(Z_2+Z_1) - \zeta(Z_2-Z_1)]\omega_3 \{ = -a i,\\
-i\{ \quad & 2\eta_1 Z_1 - [\zeta(Z_2+Z_1) - \zeta(Z_2-Z_1)]\omega_1 \{ = B - A.
\end{aligned}$$

En résolvant ces équations de condition par rapport à $L\dfrac{\sigma\left(Z_1+\frac{\gamma}{2}\right)}{\sigma\left(Z_1-\frac{\gamma}{2}\right)}$, $[\zeta(Z_2+Z_1) - \zeta(Z_2-Z_1)]$ et a, on les met, ainsi que la fonction Ω, sous la forme suivante (en posant $Z_1 = -hi$, h constante réelle et positive $< \frac{\omega_3}{i}$) :

$$\Omega(Z) = -iL\frac{\sigma(hi-Z)}{\sigma(hi+Z)} + (B - A + 2\eta_1 h)\frac{Z}{\omega_1} + A - \pi. \tag{16}$$

$$-iL\frac{\sigma\left(hi-\frac{\gamma}{2}\right)}{\sigma\left(hi+\frac{\gamma}{2}\right)} + (B - A + 2\eta_1 h)\frac{\gamma}{2\omega_1} + A - \pi = 0, \tag{17}$$

$$i[\zeta(Z_2+hi) - \zeta(Z_2-hi)] + (B - A + 2\eta_1 h)\frac{1}{\omega_1} = 0, \tag{18}$$

$$A - B - \frac{\pi i h}{\omega_3} + a i\frac{\omega_1}{\omega_3} = 0. \tag{19}$$

Il reste, maintenant, à passer au plan (z) et à exprimer le fait que les longueurs des deux lames sont données, mais, déjà, nous prévoyons le résultat. Ces conditions géométriques de grandeur seront au nombre de deux; jointes aux trois relations précédentes, elles donneront *cinq* équations pour les *six* paramètres ω_1, ω_3, γ, h, Z_2, a; un de ces paramètres pourra être choisi arbitrairement et il y aura une infinité *continue* de solutions.

Remarquons que la dernière équation, seule, contient a, si donc les autres paramètres sont calculés, a sera donné par la formule

$$a = \frac{\tau}{i}(B - A) + \pi\frac{h}{\omega_1} \qquad \left(\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}\right)$$

et cette valeur sera bien positive, puisque B — A et h le sont.

De même, Z_2 n'entre que dans l'avant-dernière relation et il est facile de voir qu'en résolvant cette équation la valeur trouvée pour Z_2 sera toujours acceptable. Considérons, en effet, la fonction

$$(20) \qquad f(Z) = i[\zeta(Z + hi) - \zeta(Z - hi)] + (B - A + 2\eta_1 h)\frac{1}{\omega_1},$$

nous pouvons encore l'écrire sous la forme

$$(20\ bis) \qquad f(Z) = i\left[2\zeta(hi) - \frac{p'(hi)}{pZ - p(hi)}\right] + (B - A + 2\eta_1 h)\frac{1}{\omega_1}.$$

C'est donc une fonction homographique de pZ, elle variera, par suite, par valeurs réelles et toujours dans le même sens lorsque le point Z décrira le rectangle des demi-périodes.

Or, on a en particulier, ε étant une quantité très petite, réelle et positive :

$$f(-hi - \varepsilon i) = -\infty,$$

$$f(-\omega_3 + \omega_1) = \frac{i}{\omega_1}\frac{\Im'_3\frac{hi}{2\omega_1}}{\Im_3\frac{hi}{2\omega_1}} + \frac{B - A}{\omega_1}.$$

Cette dernière expression est évidemment positive, car les deux termes qui la constituent le sont, et, par suite, l'équation qui nous intéresse a une racine et une seule, située sur les parties du rectangle correspondant à ϖ_1 ou à λ.

Cas particulier intermédiaire de M. Villat. — Dans son Mémoire, M. Villat, pour terminer ses calculs, s'était placé dans le cas particulier où Z_2 avait pour valeur $-\omega_3$ (*loc. cit.*, p. 478).

Nous obtiendrons donc ce cas en supposant qu'il y ait entre les constantes la relation supplémentaire

$$f(-\omega_3) = \frac{i}{\omega_1}\,\frac{\Im_4\dfrac{hi}{2\omega_1}}{\Im_4\dfrac{ht}{2\omega_1}} + \frac{B-A}{\omega_1} = 0. \tag{21}$$

Il est facile de montrer (et nous nous servirons de ce résultat) que, si l'on se donne τ, *quel qu'il soit*, on peut déterminer h de façon à satisfaire à cette équation. Il suffit, pour cela, de remarquer que si h varie de o à $\frac{\omega_3}{i}$, la fonction $i\,\dfrac{\Im_4\dfrac{hi}{2\omega_1}}{\Im_4\dfrac{ht}{2\omega_1}}$ décroît de o à $-\infty$, car sa dérivée, prise par rapport à h, est négative.

Calcul de df. — Pour expliciter les éléments du mouvement dans le plan (z), nous avons encore besoin de calculer la différentielle df.

Or, on a posé

$$f = \frac{1}{2}\,\frac{\wp'\left(Z-\frac{\gamma}{2}\right)-\wp'\gamma}{\wp\left(Z-\frac{\gamma}{2}\right)-\wp\gamma} + \frac{1}{2}\,\frac{\wp'\left(Z_1-\frac{\gamma}{2}\right)-\wp'\gamma}{\wp\left(Z_1-\frac{\gamma}{2}\right)-\wp\gamma},$$

c'est-à-dire, d'après une transformation déjà faite plus haut,

$$t = -\,\frac{\wp'\dfrac{\gamma}{2}}{\wp Z_1-\wp\dfrac{\gamma}{2}}\,\frac{\wp Z-\wp Z_1}{\wp Z-\wp\dfrac{\gamma}{2}}.$$

D'autre part, on sait que l'on a (Appell et Lacour, *Fonctions elliptiques*, p. 254) :

$$dt = \left[\wp\left(Z+\frac{\gamma}{2}\right)-\wp\left(Z-\frac{\gamma}{2}\right)\right]dZ,$$

d'où

$$(22)\quad df = 2t\,dt = \frac{2\wp'\frac{\gamma}{2}}{\wp Z_1 - \wp\frac{\gamma}{2}}\,\frac{\wp Z - \wp Z_1}{\wp Z - \wp\frac{\gamma}{2}}\left[\wp\left(Z-\frac{\gamma}{2}\right)-\wp\left(Z+\frac{\gamma}{2}\right)\right]dZ,$$

ou bien encore, en se servant de la formule classique,

$$\wp u - \wp v = \frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v},$$

et, du fait que

$$\sigma\gamma = -\wp'\frac{\gamma}{2}\,\sigma^4\frac{\gamma}{2},$$

$$(22\,bis)\quad df = \frac{2\sigma^2\gamma}{\sigma\left(Z_1+\frac{\gamma}{2}\right)\sigma\left(Z_1-\frac{\gamma}{2}\right)}\,\frac{\sigma(Z+Z_1)\,\sigma(Z-Z_1)\,\sigma^2 Z}{\sigma^3\left(Z+\frac{\gamma}{2}\right)\sigma^3\left(Z-\frac{\gamma}{2}\right)}\,dZ;$$

d'où, par conséquent,

$$(23)\quad dz = -\frac{2\sigma^2\gamma\,e^{iA}}{\sigma\left(\frac{\gamma}{2}-hi\right)\sigma\left(\frac{\gamma}{2}+hi\right)}\,\Psi(Z)\,dZ$$

avec

$$(24)\quad \Psi(Z) = \frac{\sigma^2(Z-hi)\,\sigma^2 Z}{\sigma^3\left(Z+\frac{\gamma}{2}\right)\sigma^3\left(Z-\frac{\gamma}{2}\right)}\,e^{i(B-A+2\eta_1 h)\frac{Z}{\omega_1}}\,dZ.$$

On vérifie facilement que la fonction $\Psi(Z)$ est une fonction à multiplicateurs constants et que l'on a

$$\Psi(Z+2\omega_1) = e^{2i(B-A)}\,\Psi(Z),$$
$$\Psi(Z+2\omega_3) = e^{-2a}\,\Psi(Z).$$

Expression des conditions de grandeur de l'obstacle. — Quand le point (Z) décrira dans son plan un chemin *quelconque* allant du point O au point ω_1 en restant à l'intérieur du rectangle et en évitant le pôle $\frac{\gamma}{2}$, le point (Z) décrira dans la région occupée par le fluide en mouvement un chemin partant du bord inférieur de l'obstacle pour aboutir à son bord supérieur, et son déplacement total est une donnée du problème qui fixera de façon définitive, à la fois la forme de l'obstacle et sa grandeur.

On devra donc avoir

$$(25) \text{ et } (25\ bis) \quad -\frac{2\sigma^2\gamma\, e^{iA}}{\sigma\left(\frac{\gamma}{2}-hi\right)\sigma\left(\frac{\gamma}{2}+hi\right)}\int_0^{\omega_1}\Psi(Z)\,dZ=\xi+i\eta=re^{i\varphi},$$

ξ et η (ou bien r et φ) étant des quantités données (voir *fig.* 6).

Résumé et position du problème. — En résumé, le problème dépend de *quatre* inconnues principales :

$$\omega_1,\quad \omega_3,\quad h,\quad \gamma.$$

Les données sont les angles A et B (B − A > 0) et les dimensions horizontales et verticales de l'obstacle : ξ et η (ou, ce qui revient au même, r et φ).

Les équations du problème sont au nombre de *trois :*

$$(17) \qquad iL\frac{\sigma\left(hi+\frac{\gamma}{2}\right)}{\sigma\left(hi-\frac{\gamma}{2}\right)}+(B-A+2\eta_1 h)\frac{\gamma}{2\omega_1}+A-\pi=0,$$

$$(25),\ (25\ bis) \qquad -2\frac{\sigma^2\gamma\, e^{iA}}{\sigma\left(\frac{\gamma}{2}-hi\right)\sigma\left(\frac{\gamma}{2}+hi\right)}\times\int_0^{\omega_1}\frac{\sigma^2(Z-hi)\sigma 2Z}{\sigma^3\left(Z+\frac{\gamma}{2}\right)\sigma^3\left(Z-\frac{\gamma}{2}\right)}e^{i(B-A+2\eta_1 h)\frac{Z}{\omega_1}}dZ=re^{i\varphi},$$

De plus, les inconnues principales doivent satisfaire aux inégalités suivantes :

$$\omega_1>0,\qquad \frac{\omega_3}{i}>0,\qquad 0<h<\frac{\omega_3}{i},\qquad 0<\frac{\gamma}{2}<\omega_1.$$

Il y a en outre *deux* inconnues auxiliaires a et Z_2 qui, comme nous l'avons vu, se déterminent facilement après coup au moyen des équations :

$$(18) \qquad i[\zeta(Z_2+hi)-\zeta(Z_2-hi)]+\frac{I}{\omega_1}[B-A+2\eta_1 h]=0,$$

$$(19) \qquad a=\frac{\omega_3}{i\omega_1}(B-A)+\frac{\pi h}{\omega_1}.$$

Cas limites des formules précédentes. — Avant d'aborder la discussion de l'ensemble des équations que nous venons d'obtenir, nous allons étudier quelques cas limites, dont l'examen nous sera utile par la suite.

Supposons d'abord, ce qui est le cas le plus intéressant pour nous, que le module τ des fonctions elliptiques augmente indéfiniment. Cela correspond à une diminution de l'importance de la ligne λ par rapport aux autres frontières du fluide et, à la limite, nous devrons retomber sur le dispositif simple du premier cas de M. Villat où il n'y a pas de plage au repos dans l'angle des lames.

Les calculs sont faciles à faire en se servant des formules de dégénérescence des fonctions elliptiques.

Nous poserons

$$\frac{\gamma}{2\omega_1} = c, \qquad \frac{h}{\omega_1} = m, \qquad \frac{Z}{2\omega_1} = v$$

et la formule donnant dz deviendra

$$(26) \qquad dz = -\mathrm{P}\, e^{i\mathrm{A}}\, \frac{\sin^2\pi\left(v - \frac{mi}{2}\right)\sin 2\pi v}{\sin^3\pi\left(v - \frac{c}{2}\right)\cdot\sin^3\pi\left(v + \frac{c}{2}\right)}\, e^{2i(\mathrm{B}-\mathrm{A})v}\, dv.$$

La demi-période ω_1 ne s'introduit que dans le coefficient P qui est positif et a pour valeur

$$\mathrm{P} = \frac{\pi^3}{2\omega_1^2}\, \frac{\sin^2\pi c}{\sin\pi\left(\frac{c}{2} - \frac{mi}{2}\right)\sin\pi\left(\frac{c}{2} + \frac{mi}{2}\right)}.$$

La donnée de ce coefficient pourra donc remplacer celle de ω_1, c'est du reste un simple coefficient de grandeur qui déterminera l'échelle de l'obstacle, les autres paramètres suffisant pour caractériser le mouvement à une homothétie près.

En faisant abstraction de cette homothétie et en appelant α l'angle $\varphi - \mathrm{A}$ (voir *fig.* 6), angle qui suffit alors pour déterminer l'obstacle, les équations que nous avons écrites dans le cas général deviennent

après passage à la limite :

$$(27)\qquad i\mathrm{L}\frac{\sin\pi\left(\frac{mi}{2}+\frac{c}{2}\right)}{\sin\pi\left(\frac{mi}{2}-\frac{c}{2}\right)}+(\mathrm{B}-\mathrm{A})c+\mathrm{A}-\pi=0,$$

$$(28)\qquad \text{Argument}\left\{-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sin^2\pi\left(\varphi-\frac{mi}{2}\right)\sin 2\pi\varphi}{\sin^3\pi\left(\varphi-\frac{c}{2}\right)\sin^3\pi\left(\varphi+\frac{c}{2}\right)}e^{2i(\mathrm{B}-\mathrm{A})\varphi}d\varphi\right\}=\alpha.$$

La première de ces deux relations permet de tirer facilement m en fonction de c, on trouve

$$(29)\qquad \operatorname{th}\frac{\pi m}{2}=\operatorname{tang}\frac{(\mathrm{B}-\mathrm{A})c+\mathrm{A}}{2}\cdot\operatorname{tang}\pi\frac{c}{2}.$$

Pour que la valeur ainsi trouvée pour m soit réelle et acceptable, il faut que l'on ait

$$c\geq\frac{\pi-\mathrm{A}}{\pi-\mathrm{A}+\mathrm{B}}.$$

Nous appellerons c_1 cette dernière quantité qui est évidemment comprise entre 0 et 1.

Ceci posé, il est immédiat que lorsque c varie de zéro à c_1 l'équation donnant m a une racine et une seule et celle-ci varie de façon croissante depuis zéro jusqu'à l'infini.

Si nous représentons graphiquement les variations de m en fonction de c, nous obtenons donc une courbe ayant l'allure indiquée par la figure 11.

Il est alors facile de calculer les longueurs l_1+l_2 et l' des segments $\varpi_1\,\varpi_2$ et ϖ'.

En posant $\varphi=-is$, on obtient par un calcul facile

$$(30)\qquad l_1+l_2=8\mathrm{P}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sh}^2\pi\left(s+\frac{m}{2}\right)\cdot\operatorname{sh}2\pi s}{[\operatorname{ch}2\pi s-\cos\pi c]^3}e^{2(\mathrm{B}-\mathrm{A})s}\,ds.$$

De même en posant $\varphi=\frac{1}{2}-is$, on a

$$(31)\qquad l'=8\mathrm{P}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{ch}^2\pi\left(s+\frac{m}{2}\right)\cdot\operatorname{sh}2\pi s}{[\operatorname{ch}2\pi s+\cos\pi c]^3}e^{2(\mathrm{B}-\mathrm{A})s}\,ds.$$

On voit aussi immédiatement que si l'on évalue le déplacement du point (z) entre les points $\varphi = -iH$ et $\varphi = -iH + \frac{1}{2}$ (H étant une quantité positive très grande), ce déplacement est très petit par rapport aux valeurs trouvées de $l_1 + l_2$ et de l'. Ceci revient à dire que l'on peut aller d'une des lames de l'obstacle à l'autre par un chemin très court, c'est-à-dire que la ligne λ a bien disparu dans le passage à la limite.

Fig. 11.

Enfin, si nous formons le rapport $\frac{l'}{l_1 + l_2}$, ce rapport varie de façon continue, lorsque c et m varient en restant naturellement liés par l'équation (23). On voit tout de suite qu'il tend vers zéro si c (et par suite m) tend vers zéro et qu'il se rapproche d'une certaine valeur limite

$$(32) \qquad \left(\frac{l'}{l_1 + l_2}\right)_1 = \frac{\int_0^\infty \frac{[\operatorname{sh}\pi s + \operatorname{ch}\pi s]^2 \operatorname{sh} 2\pi s}{[\operatorname{ch} 2\pi s + \cos \pi c_1]^3} e^{2(B-A)s}\, ds}{\int_0^\infty \frac{[\operatorname{sh}\pi s + \operatorname{ch}\pi s]^2 \operatorname{sh} 2\pi s}{[\operatorname{ch} 2\pi s - \cos \pi c_1]^3} e^{2(B-A)s}\, ds}$$

lorsque c tend vers c_1 (et par suite m vers ∞).

Si nous appelons α_1 la valeur de α correspondant à cette dernière valeur du rapport des lames, nous voyons qu'en faisant varier c de zéro à c_1 nous obtenons *toutes* les dispositions possibles d'obstacles depuis

celle où la lame $\varpi_2\varpi_4$ existe seule, jusqu'à la disposition limite que nous venons de mentionner.

Cette dernière disposition est celle qui avait été étudiée en premier lieu par M. Levi-Civita et dans laquelle le point de bifurcation coïncide avec le sommet de l'angle des lames (¹).

Remarquons enfin, pour terminer ce cas particulier, que la limitation trouvée pour la variation de c tient à l'hypothèse faite que le point de bifurcation était sur la lame inférieure. Si l'on faisait varier c entre c_1 et 1, on serait conduit à donner à Z_1 une affixe de la forme $\omega_1 - ih$ et l'on trouverait le dispositif répondant à l'hypothèse contraire. Il est évident que nous ne restreignons en rien la généralité en nous bornant au cas que nous avons étudié (²).

Discussion du problème dans le cas général. — Revenons maintenant au cas général où τ est quelconque et posons $ih = \mu\omega_3$ (μ sera réel et compris entre 0 et 1), ce qui donne encore avec les notations introduites tout à l'heure : $im = \mu\tau$.

Considérons d'abord la relation (17) qui s'écrit

$$(33)\qquad \psi(c,\mu) = iL\frac{\sigma(\mu\omega_3 + c\omega_1)}{\sigma(\mu\omega_3 - c\omega_1)} + \left[B - A + 2\eta_1\frac{\omega_3}{i}\mu\right]c + A - \pi = 0.$$

Nous allons étudier graphiquement cette relation en supposant que τ soit fixe et que c et μ représentent l'abscisse et l'ordonnée d'un point R dans un plan (les quantités c et μ varient respectivement entre 0 et 1).

Calculons pour cela les dérivées partielles de la fonction ψ.

On a d'abord

$$\psi'_c = i\omega_1[\zeta(\mu\omega_3 + c\omega_1) + \zeta(\mu\omega_3 - c\omega_1)] + B - A + 2\eta_1\frac{\omega_3}{i}\mu$$
$$= i\omega_1\left[2\zeta\mu\omega_3 + \frac{\wp'\mu\omega_3}{\wp\mu\omega_3 - \wp c\omega_1}\right] + B - A + 2\eta_1\frac{\omega_3}{i}\mu.$$

On retrouve ainsi la fonction homographique de $\wp c\omega_1$ qui nous a

(¹) Ces particularités avaient été déjà étudiées par M. Villat par une autre méthode dans le Chapitre I du Mémoire déjà cité.

(²) Remarquons encore que, même lorsque τ est infini, l'intégration finie de dz n'est possible que si l'angle des lames est commensurable avec π.

déjà servi pour la détermination de Z_2 et l'on voit facilement qu'elle est positive lorsque c reste compris entre 0 et 1.

De même on a

$$\psi'_\mu = i\omega_3 [\zeta(\mu\omega_3 + c\omega_1) - \zeta(\mu\omega_3 - c\omega_1)] + 2\eta_1 \frac{\omega_3}{i} c$$
$$= i\omega_3 \left[2\zeta c\omega_1 - \frac{\wp' c\omega_1}{\wp\mu\omega_3 - \wp c\omega_1} \right] + 2\eta_1 \frac{\omega_3}{i} c.$$

Cette fois nous regarderons cette expression comme une fonction homographique de $\wp\mu\omega_3$ et nous constaterons qu'elle est essentiellement négative, puisqu'elle l'est lorsque μ prend les valeurs extrêmes 0 et 1.

La courbe représentative de la relation $\psi(c, \mu) = 0$ est donc sans cesse croissante. D'autre part, si l'on donne à c une valeur fixe et qu'on fasse varier μ de 0 à 1, on a

$$\psi(c, 0) = c(B - A) + A > 0 \qquad \text{(sauf si } c = 0),$$
$$\psi(c, 1) = c(\pi + B - A) + A - \pi.$$

Les valeurs de m correspondant à la valeur donnée à c n'existeront donc qu'autant que cette dernière expression sera négative, c'est-à-dire que l'on aura

$$c < \frac{\pi - A}{\pi - A + B} \qquad \text{(ou bien } c < c_1).$$

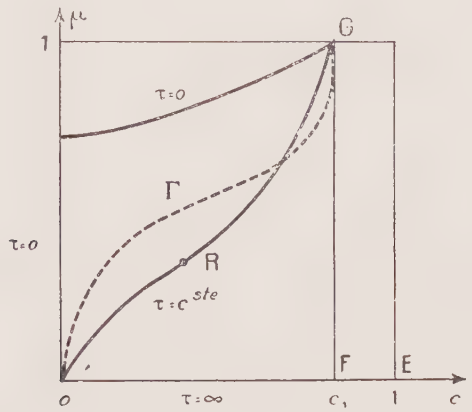
Enfin, on voit facilement que si c est nul, μ l'est aussi et que le coefficient angulaire de la tangente en ce point est égal à $\frac{i}{\tau} \operatorname{tang} \frac{A}{2}$ et aussi que pour $c = c_1$, μ prend la valeur 1.

La courbe représentative a donc en gros la forme indiquée par la figure 12; naturellement cette courbe se déforme lorsque τ varie, en gardant toujours la même allure générale. En particulier, si τ augmente indéfiniment, elle tend à se rapprocher du tracé rectiligne OFG. On s'en convainc immédiatement en remarquant que l'on déduirait cette courbe limite de celle que nous avons étudiée plus haut dans ce cas particulier (*fig.* 11) en en divisant les ordonnées par un nombre très grand.

Nous appellerons l'ensemble de ces courbes les courbes $\tau = \text{const.}$ A chaque point R de l'une d'elles correspond une valeur déterminée

de α, si bien que nous pouvons dire que chaque point R caractérise à la fois une forme d'obstacle et une valeur du module τ.

Fig. 12.



Remarquons encore que, quel que soit τ, lorsque c et μ tendent vers zéro, la longueur de la ligne $\varpi_1 \varpi_2$ augmente indéfiniment par rapport à celles de la ligne λ et du segment ϖ'. On en conclut que pour toutes les valeurs de τ ce cas correspond à un obstacle réduit au seul plan inférieur ($\alpha = 0$). C'est ce que nous avions déjà trouvé dans le cas particulier $\tau = \infty$.

Enfin, nous avons remarqué plus haut (p. 25) que sur chaque courbe $\tau = C$ se trouvait un point *unique* correspondant à la configuration limite de M. Villat; ce point sépare sur cette courbe les configurations inflexionnelles des configurations non inflexionnelles, et, lorsque τ varie de 0 à ∞, on voit facilement qu'il part du point $c = 0$, $\mu = 0$ pour atteindre le point G.

Considérons la partie d'une courbe τ comprise entre l'origine et le point particulier que nous venons de définir; lorsque τ varie, cet arc de courbe balaye une certaine région (R) du plan comprise entre les droites OF et FG et une courbe Γ (voir *fig.* 12). La région (R) comprend donc l'ensemble des points représentatifs des configurations non inflexionnelles.

Ceci posé, donnons à α une valeur fixe α_0 comprise entre 0 et α_1, et distinguons sur les courbes τ les parties le long desquelles $\alpha < \alpha_0$,

parties que nous appellerons *négatives*, de celles où $\alpha > \alpha_0$, que nous appellerons *positives*. La région (R) se trouvera ainsi découpée en un certain nombre de plages soit positives, soit négatives. La partie avoisinant l'origine est évidemment négative (puisque α y est voisin de zéro sur chaque courbe $\tau = \text{const.}$); au contraire, celle avoisinant le point G est positive (puisque α y est voisin de α_1). Il existe donc nécessairement *au moins une ligne de séparation partant d'un point de la courbe* Γ *pour aboutir en un point de la ligne brisée* OFG. Si l'on déplace le point R sur cette ligne de séparation, on obtiendra donc une suite *continue* de configurations correspondant à α_0, c'est-à-dire à des obstacles identiques à une homothétie près et comprenant comme cas extrêmes le cas limite de M. Villat et la solution de M. Levi-Civita où il n'y a pas de fluide inerte dans l'angle (¹).

Calcul de la pression. — Nous allons terminer cette étude en effectuant le calcul de la pression totale supportée par l'obstacle.

On sait que la pression en un point quelconque du fluide en mouvement est donnée par la formule $p = p_0 + \frac{1}{2}(1 - V^2)$. Nous ne modifierons pas la pression supportée par l'obstacle en supposant la portion de fluide inerte située dans l'angle solidifiée et rattachée aux deux plans qui lui sont contigus. La pression totale sera donc la résultante de toutes les pressions élémentaires $\left[p_0 + \frac{1}{2}(1 - V^2)\right] ds$ appliquées le long du contour $\varpi_2 \varpi_1 \lambda \varpi'$ et des pressions élémentaires $p_0 ds$ appliquées sur les faces arrières du dièdre.

(¹) Je tiens à indiquer en quelques mots pourquoi j'ai fait usage d'un mode de raisonnement aussi général. J'avais pensé *a priori* que le long d'une courbe τ la variation de α se ferait toujours dans le même sens et que par suite il n'y aurait qu'un point de cette ligne pour une valeur donnée de α. Or, non seulement je n'ai pas pu démontrer cette proposition, mais j'ai eu des raisons de croire qu'elle n'était peut-être pas exacte, tout au moins dans la région des configurations inflexionnelles. Il s'ensuit que les plages positives et négatives dont j'ai parlé tout à l'heure pourraient (bien que ce soit peu vraisemblable) être plus ou moins morcelées et former des *îlots* se raccordant ou non aux bords. De même, il pourrait se faire que dans leur déplacement les lignes τ passent plusieurs fois par certaines parties du plan; nous regarderions alors ces parties comme distinctes, portées par des plans différents et formant comme les plis d'une étoffe. Dans tous ces cas, notre raisonnement conserverait encore toute sa validité.

Il est évident, par un calcul classique, que si l'on appelle P_x et P_y les composantes de la pression totale, en posant $P = P_x + iP_y$, on a

$$P = \frac{1}{2i}\int (1 - V^2)\, dz, \tag{34}$$

l'intégrale étant prise dans le plan (Z) le long du chemin $0, -\omega_3, -\omega_3 + \omega_1, \omega_1$.

Or, on a

$$dz = e^{i\Omega}\, df = e^{i\Theta - T}\, df \qquad \text{et} \qquad V = e^{T};$$

d'où

$$P = \frac{1}{2i}\left[\int e^{i\Theta - T}\, df - \int e^{i\Theta + T}\, df\right]. \tag{35}$$

Considérons plus spécialement la deuxième intégrale et posons

$$Z = u + iw,$$

on aura

$$e^{i\Theta - T} = \frac{\sigma(u + iw - ih)}{\sigma(u + iw + ih)}\, e^{i(B - A + 2\eta_1 h)\frac{u + iw}{\omega_1}}\, e^{iA}$$

ou, en changeant i en $-i$,

$$e^{-i\Theta - T} = \frac{\sigma(u - iw + ih)}{\sigma(u - iw - ih)}\, e^{-i(B - A + 2\eta_1 h)\frac{u - iw}{\omega_1}}\, e^{-iA};$$

d'où enfin

$$e^{i\Theta + T} = \frac{\sigma(u - iw - ih)}{\sigma(u - iw + ih)}\, e^{i(B - A + 2\eta_1 h)\frac{u - iw}{\omega_1}}\, e^{iA}.$$

D'autre part, on a

$$df = -2\,\frac{\sigma^2\gamma}{\sigma\left(\frac{\gamma}{2} + ih\right)\sigma\left(\frac{\gamma}{2} - ih\right)} \times \frac{\sigma(u + iw - ih)\,\sigma(u + iw + ih)\,\sigma 2(u + iw)}{\sigma^3\left(u + iw + \frac{\gamma}{2}\right)\sigma^3\left(u + iw - \frac{\gamma}{2}\right)}\, d(u + iw).$$

Or, lorsque le point $u + iw$ décrit le contour d'intégration, df reste réelle, nous pouvons y changer i en $-i$ sans en modifier la valeur, ce

qui donne

$$df = -2\frac{\sigma^2\gamma}{\sigma\left(\frac{\gamma}{2}+ih\right)\sigma\left(\frac{\gamma}{2}-ih\right)} \times \frac{\sigma(u-iw+ih)\sigma(u-iw-ih)\sigma 2(u-iw)}{\sigma^3\left(u-iw+\frac{\gamma}{2}\right)\sigma^3\left(u-iw-\frac{\gamma}{2}\right)}d(u-iw).$$

Nous voyons donc que la seconde intégrale porte sur une fonction identique à la première, mais tandis que le point $u+iw$ décrit le chemin o, $-\omega_3$, $-\omega_3+\omega_1$, ω_1, le point $u-iw$ décrit le chemin o, $+\omega_3$, $\omega_3+\omega_1$, ω_1 symétrique du précédent par rapport à l'axe réel et l'on a

$$P = \frac{1}{2i}\int e^{i\Omega}\,df, \tag{36}$$

l'intégrale étant étendue au contour fermé o, $-\omega_3$, $-\omega_3+\omega_1$, $\omega_3+\omega_1$, ω_3, o.

D'où enfin $P = \pi\rho$, ρ étant le résidu relatif au pôle triple $Z = \frac{\gamma}{2}$ seul point singulier de la fonction sous le signe somme à l'intérieur du contour en question.

Calcul du résidu ρ. — Pour effectuer le calcul du résidu, nous poserons $Z = \frac{\gamma}{2}+\varepsilon$ et nous développerons l'élément différentiel au voisinage de $Z = \frac{\gamma}{2}$.

On aura successivement

$$\begin{aligned} t &= -\zeta(\varepsilon+\gamma)+\zeta\varepsilon - \left[\zeta\left(-ih-\frac{\gamma}{2}\right)-\zeta\left(-ih+\frac{\gamma}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon} - \left[\zeta\gamma-\zeta\left(\frac{\gamma}{2}+ih\right)-\zeta\left(\frac{\gamma}{2}-ih\right)\right]+\dots, \\ f = t^2 &= \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{2}{\varepsilon}\left[\zeta\gamma-\zeta\left(\frac{\gamma}{2}+ih\right)-\zeta\left(\frac{\gamma}{2}-ih\right)\right]+\dots, \\ \frac{df}{dZ} &= -\frac{2}{\varepsilon^3}+\frac{2}{\varepsilon^2}\left[\zeta\gamma-\zeta\left(\frac{\gamma}{2}+ih\right)-\zeta\left(\frac{\gamma}{2}-ih\right)\right]+\star+\dots. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\Omega(Z) = \Omega\left(\frac{\gamma}{2}+\varepsilon\right) = \varepsilon\Omega'\left(\frac{\gamma}{2}\right)+\frac{\varepsilon^2}{2}\Omega''\left(\frac{\gamma}{2}\right)+\dots$$

et, par suite,

$$e^{i\Omega} = 1 + \varepsilon i\Omega'\left(\frac{\gamma}{2}\right) + \frac{\varepsilon^2}{2}\left[i\Omega''\left(\frac{\gamma}{2}\right) - \Omega'^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right] + \dots$$

On en conclut que le développement prend la forme

$$\frac{dz}{d\mathbf{Z}} = e^{i\Omega}\frac{df}{d\mathbf{Z}} = -\frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{\nu}{\varepsilon^2} + \frac{\rho}{\varepsilon} + \dots$$

avec

$$\nu = 2\left[\zeta\gamma - \zeta\left(\frac{\gamma}{2} + ih\right) - \zeta\left(\frac{\gamma}{2} - ih\right)\right] - 2i\Omega'\left(\frac{\gamma}{2}\right),$$

$$\rho = 2\left[\zeta\gamma - \zeta\left(\frac{\gamma}{2} + ih\right) - \zeta\left(\frac{\gamma}{2} - ih\right)\right] i\Omega'\left(\frac{\gamma}{2}\right) - i\Omega''\left(\frac{\gamma}{2}\right) + \Omega'^2\left(\frac{\gamma}{2}\right).$$

Comme la fonction $\Omega(\mathbf{Z})$ reste réelle quand $\mathbf{Z}$ varie par valeurs réelles au voisinage de $\frac{\gamma}{2}$, les quantités $\Omega'\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ et $\Omega''\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ sont elles-mêmes réelles. Il en est de même du crochet

$$\left[\zeta\gamma - \zeta\left(\frac{\gamma}{2} + ih\right) - \zeta\left(\frac{\gamma}{2} - ih\right)\right].$$

On en déduit pour les composantes de la pression totale les valeurs

$$(37)\quad \begin{cases} \mathrm{P}_x = \pi\Omega'^2\left(\frac{\gamma}{2}\right), \\ \mathrm{P}_y = \pi\left\{2\left[\zeta\gamma - \zeta\left(\frac{\gamma}{2} + ih\right) - \zeta\left(\frac{\gamma}{2} - ih\right)\right]\Omega'\left(\frac{\gamma}{2}\right) - \Omega''\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right\} \end{cases}$$ (1)

ou encore en explicitant

$$(37\ bis)\quad \begin{cases} \mathrm{P}_x = \pi\left\{i\left[\zeta\left(\frac{\gamma}{2} + ih\right) - \zeta\left(\frac{\gamma}{2} - ih\right)\right] + \frac{1}{\omega_1}(\mathrm{B} - \mathrm{A} + 2\eta_1 h)\right\}^2, \\ \mathrm{P}_y = \pi\left\{2\left[\zeta\gamma - \zeta\left(\frac{\gamma}{2} + ih\right) - \zeta\left(\frac{\gamma}{2} - ih\right)\right]\right. \\ \qquad \times\left\{i\left[\zeta\left(\frac{\gamma}{2} + ih\right) - \zeta\left(\frac{\gamma}{2} - ih\right)\right] + \frac{1}{\omega_1}(\mathrm{B} - \mathrm{A} + 2\eta_1 h)\right\} \\ \qquad\qquad \left. + i\left[p\left(\frac{\gamma}{2} + ih\right) - p\left(\frac{\gamma}{2} - ih\right)\right]\right\}. \end{cases}$$

(1) L'analogie des formules que nous obtenons ainsi pour les composantes de la pression avec celles qui furent obtenues par M. Levi-Civita dans le cas général n'a rien qui doive surprendre. D'après le principe de solidification déjà invoqué tout à l'heure, tout se passe comme si nous avions à étudier le cas normal, sans aucune singularité, du mouvement du fluide autour de l'obstacle courbe formé par le contour $\varpi_2\varpi_1\lambda\varpi'$.

En particulier, la composante suivant la direction du courant P_x est, comme il fallait s'y attendre, positive et elle n'est jamais nulle.

En effet, nous avons vu plus haut, lors de la détermination de Z_2, que la fonction de Z

$$i[\zeta(Z+ih)-\zeta(Z-ih)]+\frac{1}{\omega_1}(B-A+2\tau_1 h)$$

admettait une racine unique située sur les parties du rectangle des demi-périodes correspondant à λ ou à ϖ_1. Elle est donc certainement différente de zéro pour $Z=\frac{\gamma}{2}$ (¹).

III. — Considérations générales sur les indéterminations.

La façon même dont nous avons mis le problème en équations montre que nous ne l'avons pas envisagé exactement au même point de vue que M. Villat. Nous avons, en effet, mis sur le même pied les configurations inflexionnelles et les configurations non inflexionnelles. Il est évident qu'au point de vue strict de M. Villat, ces dernières seules sont à retenir. Du reste, le cas qu'il a explicité entièrement, grâce à l'égalité restrictive dont j'ai parlé plus haut, se trouve être le cas intermédiaire entre les deux systèmes de configurations (²).

Pour interpréter les dispositions inflexionnelles, nous modifierons un peu l'énoncé du problème. Nous supposerons que l'obstacle soit formé de deux segments ne se raccordant pas directement, mais

---

(¹) Il serait intéressant de savoir comment varie la pression dans l'ensemble des mouvements possibles pour un même obstacle. Mais il faudrait faire intervenir ici le coefficient de grandeur que nous avons négligé, et les calculs paraissent assez difficiles. C'est là un point sur lequel j'aurai à revenir dans d'autres travaux.

(²) Dans tous les problèmes où il y a des obstacles à arêtes vives, les rayons de courbure aux points de raccordement des jets sont nuls. Le cas de M. Villat présentait au contraire, au point où la ligne λ quitte le segment ϖ_1, un rayon de courbure infini. Cela tient précisément au fait que c'est un cas intermédiaire où le point considéré est limite d'un point d'inflexion. Du reste, le rayon de courbure est toujours infini si l'angle intérieur au sommet correspondant du polygone (Ω) est supérieur à π. Or ici, il vaut $\frac{3\pi}{2}$.

néanmoins reliés par une cloison étanche partant de leurs faces arrières (voir *fig.* 6 *bis*). Nous chercherons à réaliser des mouvements dans lesquels la ligne de jet partant de l'extrémité supérieure du premier plan vienne se raccorder avec le second, en isolant toujours entre elle et la cloison étanche une masse de fluide au repos dont la pression soit supérieure à celle qui règne dans le sillage illimité d'arrière. Cette disposition permet alors de réaliser des configurations inflexionnelles. De plus, il est évident que cette manière de prendre le problème comprend le dispositif de M. Villat comme cas particulier. En effet, si nous prenons avec cette hypothèse un mouvement ne présentant pas d'inflexion, rien ne nous empêche de prolonger les deux lames à l'intérieur de la masse du fluide inerte jusqu'à ce qu'elles se soient directement raccordées.

Or, un tel obstacle dépend évidemment d'un paramètre de plus que celui de M. Villat (la longueur du segment $\varpi_2\varpi_1$), et nous voyons apparaître une première raison simple expliquant pourquoi, notre problème dans sa nouvelle position étant normalement déterminé, celui de M. Villat présentait une indétermination.

Des remarques analogues peuvent naturellement être faites pour le cas simple, que j'ai étudié en premier lieu, d'une veine liquide s'appuyant à deux parois rectilignes illimitées, je crois inutile d'y insister davantage.

Il existe du reste une autre façon de voir les choses, qui nous fera pénétrer peut-être encore plus intimement le sens de ces indéterminations.

Supposons, toujours en prenant l'obstacle sous sa nouvelle forme, telle que je viens de la définir, que nous terminions le premier obstacle $\varpi_2\varpi_1$ par un petit segment de plan, placé à l'extrémité libre de la ligne ϖ_1 (perpendiculairement par exemple). Il est facile de mettre le problème en équations avec cette nouvelle forme d'obstacle et aussi de trouver la fonction Ω correspondante (fonction qui sera naturellement un peu plus compliquée que la première) (¹). On cons-

(¹) Je ne puis pas reproduire ici tous les calculs, ils ne présentent pas de difficultés spéciales; on les établira directement ou en se servant des méthodes de M. Villat (*Acta mathematica*, t. XL, p. 101).

tate alors que, si l'on fait tendre vers zéro le petit plan surajouté, comme il fallait s'y attendre, on retombe sur les configurations décrites plus haut. Si nous nous plaçons maintenant au point de vue de M. Villat et si nous prolongeons les segments $\varpi_2\varpi_1$ et ϖ' jusqu'à leur point de rencontre, en laissant subsister sur le premier plan le petit obstacle à la place qu'il occupait, deux cas sont à considérer.

Si nous appelons D le point de séparation des lignes ϖ_1 et λ dans le cas extrême étudié par M. Villat, et si le petit obstacle est placé entre les points D et B (voir *fig.* 13), le sillage qu'il laisse derrière lui, étant

Fig. 13.

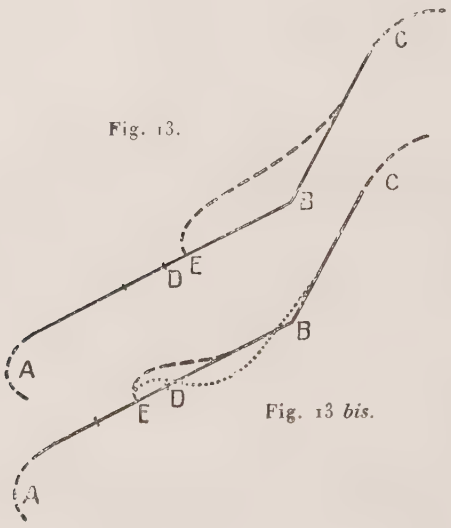


Fig. 13 *bis*.

voisin d'une configuration non inflexionnelle, sera entièrement au-dessus du plan et la présence du segment prolongé EB ne changera en rien le problème.

Si, au contraire, l'obstacle additionnel est entre les points D et A (voir *fig.* 13 *bis*), le sillage qu'il laisse derrière lui, étant voisin d'une configuration inflexionnelle, coupera nécessairement (si l'obstacle est assez petit) le prolongement EB du segment $\varpi_2\varpi_1$. Le problème, au sens de M. Villat, est alors impossible puisqu'il y a recoupement d'une des lignes de jet avec l'obstacle, et nous sommes conduits à essayer une configuration où cette ligne de jet viendrait se raccorder avec le

segment EB et non avec le segment BC, en isolant toujours une plage de fluide inerte.

Nous pouvons donc résumer ainsi nos résultats. Sur la face AB de l'obstacle on peut distinguer deux plages : l'une AD est une sorte de plage *neutre ;* un obstacle placé sur elle, une imperfection de la lame, donnera naissance à une perturbation très petite (sous la forme d'une petite masse de liquide ne participant pas au mouvement général), qui diminuera *jusqu'à disparaître entièrement*, si l'on réduit cet obstacle, si l'on rectifie cette imperfection ; l'autre est une plage *critique :* la moindre irrégularité sur elle tend à créer une perturbation d'étendue notable, avec un sillage se raccordant à l'autre paroi BC de l'obstacle, et quand bien même on réduirait cette irrégularité jusqu'à la faire disparaître entièrement par une diminution progressive, la perturbation à laquelle elle a donné naissance ne tendrait pas à disparaître et *subsisterait toujours de façon finie.*

On voit immédiatement l'importance physique de ces résultats. Il semble qu'avec des obstacles parfaitement polis, il n'y ait aucune raison pour qu'une ligne de jet se détache de la paroi AB en un endroit quelconque et vraisemblablement c'est le dispositif de M. Levi-Civita sans plage de fluide mort à l'avant qui serait réalisé ; au contraire, avec les obstacles matériels ordinaires, plus ou moins rugueux, la plage de fluide inerte tendrait toujours à se former, et cela sans doute le plus tôt possible, c'est-à-dire précisément dans le cas extrême étudié par M. Villat. Ce dernier mouvement apparaîtrait donc comme le cas normal dans une expérience courante (¹).

Il serait sans doute encore possible de préciser ces divers aperçus et le champ de la recherche est largement ouvert de ce côté ; j'espère néanmoins que ce que je viens de dire apporte quelque lumière sur

(¹) Il est peut-être permis de faire une comparaison entre les phénomènes que nous décrivons ainsi et la façon dont un cours d'eau arrondit petit à petit les angles rentrants que peut présenter sa rive. Si l'obstacle ABC était susceptible de se désagréger sous l'action du courant, la plage neutre se trouverait peu à peu creusée, le courant tendant à emmener une à une les particules qu'il en pourrait détacher ; au contraire, sur la zone critique, les particules se protégeraient mutuellement et la plage de fluide inerte, qui tend naturellement à se former avec les obstacles rugueux, serait évidemment une plage de sédimentation, et ce double processus tendrait à remplacer la paroi anguleuse par une courbe unique.

ces indéterminations *a priori* inattendues. En développant du reste ces idées directrices dans les Chapitres qui vont suivre, nous allons voir que le problème est encore bien plus indéterminé qu'on ne pouvait le prévoir et que rien ne s'oppose à ce que, théoriquement tout au moins, on ajoute sans cesse de nouvelles complications.

Enfin, la façon même dont nous expliquons la naissance des plages inertes donne à penser que des considérations de stabilité des différentes configurations ne permettraient peut-être pas de faire un choix entre elles. Il est assez probable que ces configurations sont à peu près également stables ou également instables; si, à partir d'une configuration réalisée, on perturbe légèrement le mouvement, il est très possible que, lorsqu'il sera redevenu permanent, ce ne soit pas la même disposition que l'on retrouve, mais bien une configuration voisine qui subsistera à son tour jusqu'à ce qu'une nouvelle perturbation se produise.

Si l'on veut bien me permettre une comparaison grossière, il se passerait, dans cette conception, quelque chose d'analogue à ce qui se passe pour une bille pesante placée dans un cylindre horizontal, pour laquelle tous les points de la génératrice la plus basse sont des positions d'équilibre.

Que les résultats futurs justifient cette conception, qui n'a aucune prétention à s'adapter exactement aux faits, ou qu'ils l'infirment, d'importantes recherches sont à faire de ce côté, qui ne sauraient manquer d'être fécondes dès qu'on aura l'instrument mathématique permettant de traiter les discontinuités en mouvement non permanent (¹).

Enfin, je mentionne encore quelques résultats relatifs aux configurations inflexionnelles, dont j'ai peu parlé dans le précédent Chapitre. Lorsque τ tend vers zéro, les lignes $\tau = \text{const.}$ tendent à se confondre avec une ligne brisée formée d'une partie de $O\mu$ et d'un arc d'hyperbole; en général, cela correspond à la disparition de la ligne ϖ'. Si enfin le point P vient au point G, c'est la ligne ϖ_1 qui disparaît et le point

(¹) Une Note récente de M. H. Villat [*Sur le mouvement variable d'un fluide indéfini, avec sillage, en présence d'un corps solide* (*Comptes rendus Acad. Sc.*, mars 1920)] semble permettre d'espérer atteindre ce but.

de bipartition arrive à l'extrémité du segment de plan et tend à passer sur l'autre face (voir *fig.* 12).

DEUXIÈME PARTIE.

Nous venons de voir, dans le précédent Chapitre, comment l'introduction d'obstacles supplémentaires, tendant ensuite à disparaître, était susceptible d'expliquer les indéterminations signalées au début de ce travail. Dans l'ensemble de cette première Partie, les obstacles additionnels étaient toujours en contact avec l'obstacle principal de façon à ne former avec lui qu'un bloc d'un seul tenant.

Il est à prévoir que des singularités *nouvelles* seront mises en évidence si nous appliquons la même méthode avec un obstacle additionnel *séparé* de l'obstacle principal. Afin de donner un exemple simple et approfondi de ce qui peut alors se passer, nous allons étudier, dans cette deuxième Partie, le mouvement (toujours uniforme à l'infini) d'un fluide dans lequel se trouveraient placés *deux* obstacles plans normaux au courant, et nous nous réserverons d'étudier plus spécialement ce qui se passe quand l'un de ces obstacles est très petit par rapport à l'autre.

Pour de tels mouvements, différentes hypothèses sont possibles sur la disposition des lignes de glissement.

Il peut se faire :

1° Que les lignes de jet issues de chaque plan s'étendent indéfiniment derrière lui ;

2° Que les lignes de jet de l'un des plans se raccordent avec l'autre, celles de ce dernier s'étendant à l'infini ;

3° Que les lignes de jet de l'un des plans se ferment derrière lui, celles de l'autre s'étendant encore à l'infini.

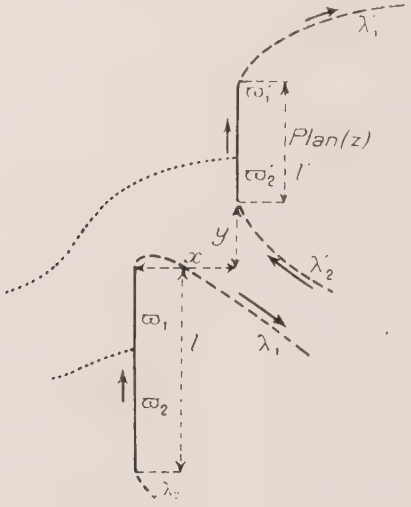
Telles sont les trois configurations que nous allons successivement étudier (1).

(1) Il est évident que ces trois configurations sont les seules qui puissent se présenter. Les lignes de glissement ne peuvent certainement pas se fermer simultanément derrière

I. - Étude du mouvement du fluide avec deux obstacles plans normaux au courant, dans l'hypothèse de deux sillages illimités à l'arrière.

Le long des lignes de discontinuités introduites avec cette hypothèse, la vitesse du fluide devra nécessairement être constante et égale à l'unité. Les lignes extérieures λ_2 et λ'_1 (voir *fig.* 14) présenteront

Fig. 14.



une disposition analogue à celle qui existe dans le cas d'un obstacle unique; quant aux lignes λ_1 et λ'_2, elles limiteront un jet fluide de largeur plus ou moins grande, mais elles devront rester convexes et tendre à prendre à l'infini une direction horizontale de façon qu'il n'y

les deux obstacles, car on tomberait sous le coup et du paradoxe de d'Alembert et de celui de M. Brillouin. Il est impossible aussi qu'une seule des lignes de jet d'un obstacle se raccorde avec l'autre, par suite de la présence d'un point d'inflexion sur la frontière d'un sillage illimité. Ce dernier cas ne pourrait se présenter que si les deux plans, au lieu d'être isolés, étaient réunis par une cloison étanche reliant leurs faces arrières. On retrouverait alors les obstacles étudiés au Chapitre II de la première Partie dans le cas particulier $A = B = \frac{\pi}{2}$.

ait pas de recoupement des lignes de jet à l'arrière des obstacles. Nous laisserons néanmoins de côté cette dernière condition, nous réservant de ne l'étudier qu'une fois les calculs terminés. Le mouvement présentera alors la disposition indiquée par la figure 14.

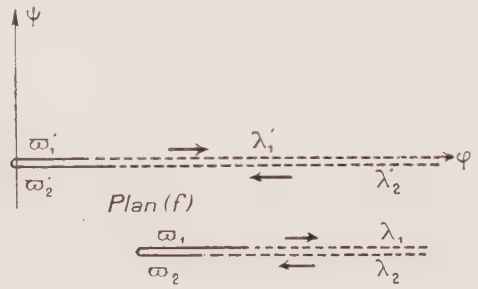
Le domaine correspondant du plan (f) est formé de l'ensemble de ce plan entaillé par deux coupures suivant des demi-droites parallèles à l'axe réel.

Une application simple de la formule de Schwarz permet de réaliser la représentation conforme de ce domaine sur le demi-plan supérieur d'une variable t au moyen de la formule

$$f = \frac{(t-\beta)(t-2\alpha-\beta)}{2} + \alpha\beta \operatorname{L}\frac{t}{\beta}. \tag{38}$$

L'origine du plan (f) est supposée correspondre au point de bipartition de l'obstacle supérieur et il est facile de se rendre compte que la

Fig. 15.



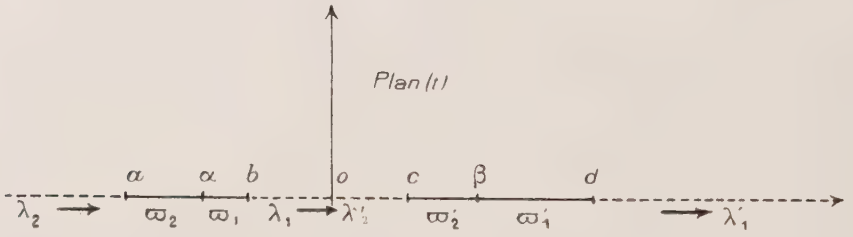
donnée des deux paramètres α et β ($\alpha < 0$, $\beta > 0$) est entièrement équivalente à celle des coordonnées de l'extrémité de la coupure correspondant au second obstacle. Enfin, le logarithme a la détermination réelle pour t positif.

Le domaine (t) présente alors la disposition indiquée par la figure 16 et nous représenterons par a, α, b, 0, c, β, d les valeurs de t correspondant aux points de séparation des diverses lignes ϖ et λ, ces valeurs étant rangées, ainsi écrites, en ordre croissant.

Le domaine du plan (Ω) est un peu plus compliqué ; si nous suivons les variations du point (Ω) quand t décrit de gauche à droite l'axe réel de son plan, nous voyons immédiatement que ce point part de l'origine

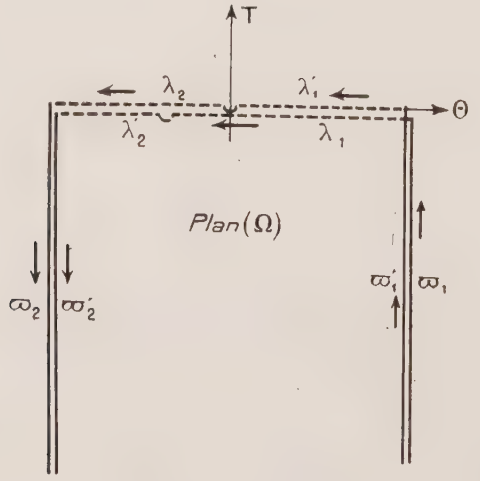
et décrit deux fois dans le même sens le contour de la demi-bande illimitée comprise entre les deux parallèles $\Theta = \pm \frac{\pi}{2}$ et située au-dessous de l'axe des Θ. Ce fait, joint à la remarque que le domaine correspondant dans le plan (Ω) au fluide en mouvement doit être à la gauche du déplacement du mobile, nous conduit à envisager ce

Fig. 16.



domaine comme étant porté par une surface de Riemann, ayant nécessairement un point de ramification R à l'intérieur du domaine (¹).

Fig. 17.



A ce point de ramification correspond, dans le demi-plan supérieur (t), une valeur imaginaire de t, et si, par le procédé de symétrie

(¹) S'il y avait plusieurs points de ramification, le domaine ne pourrait être simplement connexe.

de Schwarz, on prolonge analytiquement la fonction $t(\Omega)$ dans le demi-plan inférieur, on voit qu'à la valeur imaginaire conjuguée de la première doit correspondre aussi un second point de ramification de la surface de Riemann (Ω) extérieur au domaine qui nous intéresse (¹).

La représentation conforme du domaine (Ω) sur le demi-plan (t) est alors assurée par une relation de la forme

$$(39)\qquad \Omega = -\int_{\infty}^{t} \frac{A t^2 + B t + C}{(t-\alpha)(t-\beta)\sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)(t-d)}}\, dt,$$

formule dans laquelle le radical a la détermination positive pour les grandes valeurs réelles de t. Les constantes A, B, C sont réelles, A doit de plus être positive, puisque, pour de grandes valeurs de t, $\frac{d\Omega}{dt}$ est évidemment réelle et négative. Les racines du numérateur correspondent aux images des points de ramification signalés plus haut; elles devront être imaginaires conjuguées, c'est-à-dire que l'on devra avoir en outre

$$B^2 - 4AC < 0.$$

Calcul explicite de Ω. — Il est ici encore facile de calculer explicitement l'intégrale Ω au moyen des fonctions elliptiques. Nous poserons, comme nous l'avons fait dans la première Partie de ce travail,

$$\int_{\infty}^{t} \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)(t-d)}} = Z - \frac{\gamma}{2},$$

d'où l'on tire

$$(40)\qquad t = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{P}\left(Z - \frac{\gamma}{2}\right)\mathrm{P}'\gamma}{\mathrm{P}\left(Z - \frac{\gamma}{2}\right)\mathrm{P}\gamma} + \frac{S_1}{4}$$

avec

$$S_1 = a + b + c + d, \qquad 0 < \gamma < 2\omega_1.$$

(¹) *Voir*, pour ces diverses extensions de la formule de Schwarz, le Mémoire de Schläfli déjà cité.

Comme plus haut, la donnée de a, b, c, d est équivalente à celle des demi-périodes ω_1 et ω_3, de S_1 et de γ $\left(\omega_1$ et $\frac{\omega_3}{i}$ réelles et positives$\right)$.

On peut alors écrire

$$\frac{At^2+Bt+C}{(t-\alpha)(t-\beta)} = A + \frac{P}{t-\alpha} + \frac{Q}{t-\beta}$$

avec

$$B = A(\alpha+\beta) + P + Q,$$
$$C = A\alpha\beta - P\beta - Q\alpha.$$

En suivant les variations de la fonction de t ainsi écrite, on voit facilement que la condition $B^2 - 4AC < 0$, jointe au fait que β est supérieur à α, entraîne $P < 0$, $Q > 0$.

D'où pour Ω la forme

$$(41)\qquad \Omega(t) = -\int_{\frac{\gamma}{2}}^{Z}\left[A + \frac{P}{\frac{1}{2}\frac{\wp'\left(Z-\frac{\gamma}{2}\right)-\wp'\gamma}{\wp\left(Z-\frac{\gamma}{2}\right)-\wp\gamma} + \frac{S_1}{i}\alpha} + \frac{Q}{\frac{1}{2}\frac{\wp'\left(Z-\frac{\gamma}{2}\right)-\wp'\gamma}{\wp\left(Z-\frac{\gamma}{2}\right)-\wp\gamma} + \frac{S_1}{i}\beta}\right]dZ.$$

Nous poserons, comme nous l'avons également déjà fait,

$$(42)\qquad F\left(Z, \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\wp'\left(Z-\frac{\gamma}{2}\right)-\wp'\gamma}{\wp\left(Z-\frac{\gamma}{2}\right)-\wp\gamma},$$

La fonction $F\left(Z, \frac{\gamma}{2}\right)$ variant toujours dans le même sens quand le point (Z) décrit le rectangle des demi-périodes et passant par toute

valeur réelle donnée à l'avance, nous pouvons poser

$$F\left(Z_1, \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{S_1}{4} + \alpha,$$

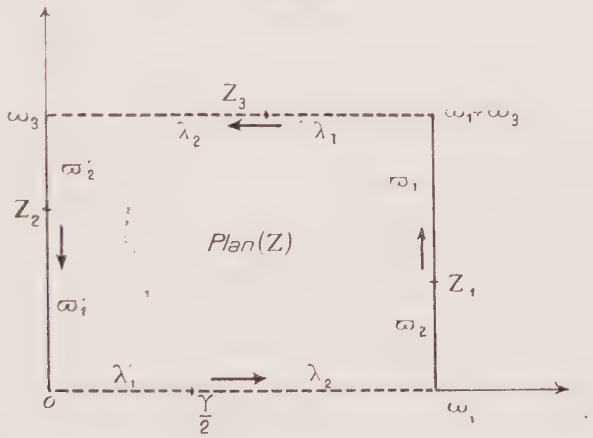
$$F\left(Z_2, \frac{\gamma}{2}\right) = -\frac{S_1}{4} + \beta,$$

$$F\left(Z_3, \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{S_1}{4},$$

ces formules servant de définition à Z_1, Z_2, Z_3, quantités qui seront parfaitement déterminées et remplaceront désormais α, β et S_1.

La disposition des points correspondants dans le plan (Z) est indiquée nettement sur la figure 18, d'après l'ordre de grandeur des constantes primitives (1).

Fig. 18.



L'intégrale Ω se décompose alors en trois parties, dont la première se calcule immédiatement.

La seconde partie revient au calcul de

$$\int_{\frac{\gamma}{2}}^{\prime} \frac{dZ}{F\left(Z, \frac{\gamma}{2}\right) - F\left(Z_1, \frac{\gamma}{2}\right)}$$

et est susceptible d'une intégration très élégante.

(1) C'est la nécessité d'avoir des domaines à la gauche du déplacement des points qui fait que nous prenons, suivant les cas, le rectangle des demi-périodes ou son symétrique par rapport à l'axe réel.

On a en effet (*voir* p. 20)

$$\mathrm{F}\left(\mathrm{Z},\frac{\gamma}{2}\right)\quad\mathrm{F}\left(\mathrm{Z}_1,\frac{\gamma}{2}\right)\quad=\frac{\wp'\frac{\gamma}{2}}{\wp\mathrm{Z}_1-\wp\frac{\gamma}{2}}\,\frac{\wp\mathrm{Z}-\wp\mathrm{Z}_1}{\wp\mathrm{Z}-\wp\frac{\gamma}{2}}.$$

En permutant Z_1 et $\frac{\gamma}{2}$, cette formule devient

$$\mathrm{F}(\mathrm{Z},\mathrm{Z}_1)\quad\mathrm{F}\left(\frac{\gamma}{2},\mathrm{Z}_1\right)=\frac{\wp'\mathrm{Z}_1}{\wp\frac{\gamma}{2}-\wp\mathrm{Z}_1}\,\frac{\wp\mathrm{Z}\quad\wp\frac{\gamma}{2}}{\wp\mathrm{Z}\quad\wp\mathrm{Z}_1};$$

d'où, par conséquent,

$$\frac{1}{\mathrm{F}\left(\mathrm{Z},\frac{\gamma}{2}\right)\quad\mathrm{F}\left(\mathrm{Z}_1,\frac{\gamma}{2}\right)}$$

$$=\quad\frac{\left(\wp\mathrm{Z}_1-\wp\frac{\gamma}{2}\right)^2}{\wp'\frac{\gamma}{2}\times\wp'\mathrm{Z}_1}\left[\mathrm{F}(\mathrm{Z},\mathrm{Z}_1)\quad\mathrm{F}\left(\frac{\gamma}{2},\mathrm{Z}_1\right)\right]$$

$$=-\quad\frac{\left(\wp\mathrm{Z}_1\quad\wp\frac{\gamma}{2}\right)^2}{\wp'\frac{\gamma}{2}\wp'\mathrm{Z}_1}\left[\zeta(\mathrm{Z}+\mathrm{Z}_1)\;-\zeta(\mathrm{Z}\quad\mathrm{Z}_1)-\zeta\left(\frac{\gamma}{2}+\mathrm{Z}_1\right)+\zeta\left(\frac{\gamma}{2}\quad\mathrm{Z}_1\right)\right].$$

L'intégration est alors immédiate et donne

$$\int^{z}\frac{d\mathrm{Z}}{\mathrm{F}\left(\mathrm{Z},\frac{\gamma}{2}\right)-\mathrm{F}\left(\mathrm{Z}_1,\frac{\gamma}{2}\right)}$$

$$=-\frac{\left(\wp\mathrm{Z}_1-\wp\frac{\gamma}{2}\right)^2}{\wp'\frac{\gamma}{2}\wp'\mathrm{Z}_1}\left(\mathrm{L}\,\frac{\sigma(\mathrm{Z}_1+\mathrm{Z})}{\sigma(\mathrm{Z}_1-\mathrm{Z})}\,\frac{\sigma\left(\mathrm{Z}_1-\frac{\gamma}{2}\right)}{\sigma\left(\mathrm{Z}_1+\frac{\gamma}{2}\right)}-\left[\zeta\left(\frac{\gamma}{2}+\mathrm{Z}_1\right)\;-\zeta\left(\frac{\gamma}{2}-\mathrm{Z}_1\right)\right]\left(\mathrm{Z}-\frac{\gamma}{2}\right)\right).$$

La troisième intégrale se déduit de la précédente par le simple changement de Z_1 en Z_2 et la formule donnant Ω prend la forme

$$\Omega(\mathrm{Z})=\mathrm{P}_1\,\mathrm{L}\,\frac{\sigma(\mathrm{Z}_1+\mathrm{Z})}{\sigma(\mathrm{Z}_1\quad\mathrm{Z})}\,\frac{\sigma\left(\mathrm{Z}_1-\frac{\gamma}{2}\right)}{\sigma\left(\mathrm{Z}_1+\frac{\gamma}{2}\right)}+\mathrm{Q}_1\,\mathrm{L}\,\frac{\sigma(\mathrm{Z}_2+\mathrm{Z})}{\sigma(\mathrm{Z}_2-\mathrm{Z})}\,\frac{\sigma\left(\mathrm{Z}_2-\frac{\gamma}{2}\right)}{\sigma\left(\mathrm{Z}_2+\frac{\gamma}{2}\right)}+\mathrm{H}\left(\mathrm{Z}-\frac{\gamma}{2}\right);$$

P_1, Q_1, H étant de nouvelles constantes liées aux précédentes A, P, Q par les relations

$$P_1 = P\frac{\left(\wp Z_1 - \wp\frac{\gamma}{2}\right)^2}{\wp' Z_1 \wp'\frac{\gamma}{2}},$$

$$Q_1 = Q\frac{\left(\wp Z_2 - \wp\frac{\gamma}{2}\right)^2}{\wp' Z_2 \wp'\frac{\gamma}{2}},$$

$$H = A - P_1\left[\zeta\left(\frac{\gamma}{2} + Z_1\right) - \zeta\left(\frac{\gamma}{2} - Z_1\right)\right] - Q_1\left[\zeta\left(\frac{\gamma}{2} + Z_2\right) - \zeta\left(\frac{\gamma}{2} - Z_2\right)\right].$$

L'ensemble des neuf paramètres primitifs

$$A,\quad B,\quad C,\quad \alpha,\quad \beta,\quad a,\quad b,\quad c,\quad d$$

est alors remplacé par les données équivalentes

$$H,\quad P_1,\quad Q_1,\quad Z_1,\quad Z_2,\quad Z_3,\quad \omega_1,\quad \omega_3,\quad \gamma.$$

Détermination des constantes. — Il reste ici encore à déterminer les constantes de façon que le domaine du plan (Ω) ait bien les dimensions et la position indiquées par la figure 17.

D'après les expressions données pour les constantes P_1, Q_1, H, on voit immédiatement que les deux premières sont des imaginaires pures à coefficients de i négatif et la dernière une quantité complexe de la forme $K - 2\eta_1 P_1$, K étant réelle.

Ω peut alors s'écrire ainsi

$$\Omega(Z) = P_1 L\frac{\sigma(Z_1 - Z)}{\sigma(Z_1 - Z)} + Q_1 L\frac{\sigma(Z_2 - Z)}{\sigma(Z_2 - Z)} + (K - 2\eta_1 P_1)Z + \Lambda$$

en posant

$$\Lambda = -(K - 2\eta_1 P_1)\frac{\gamma}{2} - P_1 L\frac{\sigma\left(Z_1 + \frac{\gamma}{2}\right)}{\sigma\left(Z_1 - \frac{\gamma}{2}\right)} - Q_1 L\frac{\sigma\left(Z_2 + \frac{\gamma}{2}\right)}{\sigma\left(Z_2 - \frac{\gamma}{2}\right)}.$$

Les conditions provenant du plan (Ω) montrent que l'on doit avoir

$$\Omega(0) = +\frac{\pi}{2}, \qquad \Omega(\omega_1) = -\frac{\pi}{2}, \qquad \Omega(\omega_1 + \omega_3) = +\frac{\pi}{2}, \qquad \Omega(\omega_3) = -\frac{\pi}{2}.$$

En les explicitant, ces relations s'écrivent (*voir* Tableau 15, p. 22)

$$\Lambda = +\frac{\pi}{2},$$

$$P_1[2\eta_1 Z_1 - i\pi] + Q_1[2\eta_1 Z_2 - i\pi] + (K - 2\eta_1 P_1)\omega_1 + \Lambda = -\frac{\pi}{2},$$

$$P_1[2(\eta_1+\eta_3)Z_1 + i\pi] + Q_1[2(\eta_1+\eta_3)Z_2 - i\pi] + (K - 2\eta_1 P_1)(\omega_1+\omega_3) + \Lambda = +\frac{\pi}{2},$$

$$P_1[2\eta_3 Z_1 + i\pi] + Q_1[2\eta_3 Z_2 - i\pi] + (K - 2\eta_1 P_1)\omega_3 + \Lambda = -\frac{\pi}{2}.$$

Ce système est très facile à résoudre. En séparant les parties réelles et les parties imaginaires et en combinant les équations comme il a déjà été fait précédemment, on trouve, tous calculs faits,

$$\Lambda = +\frac{\pi}{2}, \qquad K = 2i\eta_3,$$

$$P_1 = Q_1 = -i, \qquad Z_1 + Z_2 = \omega_1 + \omega_3.$$

En portant ces valeurs dans la formule donnant Ω, on peut mettre cette fonction sous la forme

$$\Omega(Z) = -iL\frac{\sigma(Z_1+Z)}{\sigma(Z_1-Z)}\frac{\sigma(Z_2+Z)}{\sigma(Z_2-Z)} - 2i\eta_2 Z + \frac{\pi}{2}. \tag{43}$$

Si l'on pose $Z_1 = \omega_1 + ih$ et $Z_2 = \omega_3 - ih$ (puisque $Z_1 + Z_2 = \omega_1 + \omega_3$), on obtient encore pour Ω la forme équivalente

$$\Omega(Z) = -iL\frac{\sigma_1(ih+Z)}{\sigma_1(ih-Z)}\frac{\sigma_3(ih-Z)}{\sigma_3(ih+Z)} + \frac{\pi}{2}. \tag{43 bis}$$

Quant à la relation $\Lambda = \frac{\pi}{2}$, elle exprime naturellement le fait que Ω doit s'annuler pour $Z = \frac{\gamma}{2}$ et elle prend indifféremment l'une ou l'autre des deux formes suivantes :

$$iL\frac{\sigma\left(Z_1+\frac{\gamma}{2}\right)}{\sigma\left(Z_1-\frac{\gamma}{2}\right)}\frac{\sigma\left(Z_2+\frac{\gamma}{2}\right)}{\sigma\left(Z_2-\frac{\gamma}{2}\right)} - i\gamma_2 + \frac{\pi}{2} = 0, \tag{44}$$

$$-iL\frac{\sigma_1\left(ih+\frac{\gamma}{2}\right)}{\sigma_1\left(ih-\frac{\gamma}{2}\right)}\frac{\sigma_3\left(ih-\frac{\gamma}{2}\right)}{\sigma_3\left(ih+\frac{\gamma}{2}\right)} + \frac{\pi}{2} = 0. \tag{44 bis}$$

Calcul de df. — Pour passer au plan (z), il reste encore à faire le calcul de df. Or, nous avons posé

$$f = \frac{(t-\beta)(t-2\alpha-\beta)}{2} + \alpha\beta L\frac{t}{\beta},$$

ce qui donne

$$df = \frac{(t-\alpha)(t-\beta)}{t}\,dt.$$

Mais nous avons vu plus haut que l'on avait :

$$t = \mathrm{F}\left(Z, \frac{\gamma}{2}\right) - \mathrm{F}\left(Z_3, \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{p'\frac{\gamma}{2}}{pZ_3 - p\frac{\gamma}{2}}\,\frac{pZ - pZ_3}{pZ - p\frac{\gamma}{2}},$$

$$t-\alpha = \mathrm{F}\left(Z, \frac{\gamma}{2}\right) - \mathrm{F}\left(Z_1, \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{p'\frac{\gamma}{2}}{pZ_1 - p\frac{\gamma}{2}}\,\frac{pZ - pZ_1}{pZ - p\frac{\gamma}{2}},$$

$$t-\beta = \mathrm{F}\left(Z, \frac{\gamma}{2}\right) - \mathrm{F}\left(Z_2, \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{p'\frac{\gamma}{2}}{pZ_2 - p\frac{\gamma}{2}}\,\frac{pZ - pZ_2}{pZ - p\frac{\gamma}{2}},$$

et aussi que

$$dt = \left[p\left(Z - \frac{\gamma}{2}\right) - p\left(Z + \frac{\gamma}{2}\right)\right] dZ.$$

On aura donc, en transformant les différences de fonctions p en produits de fonctions σ,

$$(45) \qquad df = \frac{\sigma^2\gamma\,\sigma\left(Z_3 + \frac{\gamma}{2}\right)\sigma\left(Z_3 - \frac{\gamma}{2}\right)}{\sigma\left(Z_1 + \frac{\gamma}{2}\right)\sigma\left(Z_1 - \frac{\gamma}{2}\right)\sigma\left(Z_2 + \frac{\gamma}{2}\right)\sigma\left(Z_2 - \frac{\gamma}{2}\right)} \times \frac{\sigma(Z+Z_1)\,\sigma(Z-Z_1)\,\sigma(Z+Z_2)\,\sigma(Z-Z_2)\,\sigma^2 Z}{\sigma^3\left(Z+\frac{\gamma}{2}\right)\sigma^3\left(Z-\frac{\gamma}{2}\right)\sigma(Z+Z_3)\,\sigma(Z-Z_3)}\,dZ,$$

formule susceptible de s'écrire encore

$$(45\ bis) \qquad df = \frac{\sigma^2\gamma\,\sigma\left(Z_3 + \frac{\gamma}{2}\right)\sigma\left(Z_3 - \frac{\gamma}{2}\right)}{\sigma_1\left(ih + \frac{\gamma}{2}\right)\sigma_1\left(ih - \frac{\gamma}{2}\right)\sigma_3\left(ih + \frac{\gamma}{2}\right)\sigma_3\left(ih - \frac{\gamma}{2}\right)} \times \frac{\sigma_1(ih+Z)\,\sigma_1(ih-Z)\,\sigma_3(ih+Z)\,\sigma_3(ih-Z)\,\sigma^2 Z}{\sigma^3\left(Z+\frac{\gamma}{2}\right)\sigma^3\left(Z-\frac{\gamma}{2}\right)\sigma(Z+Z_3)\,\sigma(Z-Z_3)}\,dZ;$$

d'où enfin, pour dz, l'une ou l'autre des formules équivalentes :

$$(46)\quad \left\{ \begin{array}{l} dz = i\,\dfrac{\sigma^3\gamma\,\sigma\left(Z_3+\frac{\gamma}{2}\right)\sigma\left(Z_3-\frac{\gamma}{2}\right)}{\sigma\left(Z_1+\frac{\gamma}{2}\right)\sigma\left(Z_1-\frac{\gamma}{2}\right)\sigma\left(Z_2+\frac{\gamma}{2}\right)\sigma\left(Z_2-\frac{\gamma}{2}\right)}\,\Phi(Z)\,dZ \\ \text{avec} \\ \Phi(Z) = \dfrac{\sigma^2(Z+Z_1)\,\sigma^2(Z+Z_2)\,\sigma 2Z}{\sigma^3\left(Z+\frac{\gamma}{2}\right)\sigma^3\left(Z-\frac{\gamma}{2}\right)\sigma(Z+Z_3)\,\sigma(Z-Z_3)}\,e^{2\zeta_2 Z} \end{array} \right.$$

ou

$$(46\,bis)\quad \left\{ \begin{array}{l} dz = i\,\dfrac{\sigma^2\gamma\,\sigma\left(Z_3+\frac{\gamma}{2}\right)\sigma\left(Z_3-\frac{\gamma}{2}\right)}{\sigma_1\left(ih+\frac{\gamma}{2}\right)\sigma_1\left(ih-\frac{\gamma}{2}\right)\sigma_3\left(ih+\frac{\gamma}{2}\right)\sigma_3\left(ih-\frac{\gamma}{2}\right)}\,\Phi_1(Z)\,dZ \\ \text{avec} \\ \Phi_1(Z) = \dfrac{\sigma_1^2(Z+ih)\,\sigma_3^2(Z-ih)\,\sigma 2Z}{\sigma^3\left(Z+\frac{\gamma}{2}\right)\sigma^3\left(Z-\frac{\gamma}{2}\right)\sigma(Z+Z_3)\,\sigma(Z-Z_3)}. \end{array} \right.$$

Ici, la fonction Φ (ou Φ_1), comme on le constate facilement, admet les deux périodes $2\omega_1$ et $2\omega_3$; il serait donc possible de faire l'intégration jusqu'au bout et de réaliser sous forme finie toutes les circonstances du mouvement dans le plan (z).

Résumé et position du problème. — En résumé, le problème dépend de six constantes ω_1, ω_3, γ, Z_1, Z_2, Z_3 satisfaisant aux relations

$$Z_1 + Z_2 = \omega_1 + \omega_3,$$

$$\Omega\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 0$$

et aux inégalités

$$\omega_1 > 0, \qquad \frac{\omega_3}{i} > 0, \qquad 0 < \gamma < 2\omega_1.$$

Il faudrait, pour achever de les déterminer, adjoindre aux équations précédentes les conditions résultant des données géométriques de l'obstacle, données qui sont au nombre de quatre (les longueurs des deux lames et leurs écartements en largeur et profondeur).

Le problème, sous certaines conditions de possibilité, est donc entièrement déterminé, *sans que l'on puisse se donner* a priori *l'inclinaison du jet intermédiaire compris entre les deux lignes* λ_1 *et* λ_2'.

En d'autres termes, si l'on écrit en plus la condition que ce jet est horizontal, ce qui se traduit par $\Omega(Z_3) = 0$, les données géométriques ne peuvent plus être prises arbitrairement : *l'hypothèse des deux sillages illimités ne peut donc s'appliquer qu'à des dispositions particulières des deux obstacles.*

Étude du cas où le jet intermédiaire est horizontal. — Nous allons, en nous plaçant dans ce cas particulier, qui est le seul physiquement admissible, pousser un peu plus loin les calculs.

Étudions tout d'abord la condition $\Omega_1(Z_3) = 0$.

L'équation $\Omega(Z) = 0$ peut encore s'écrire

$$(17) \qquad i\frac{\sigma_1(ih + Z)}{\sigma_3(ih + Z)} = \frac{\sigma_1(ih - Z)}{\sigma_3(ih - Z)}$$

ou, en passant aux fonctions de Jacobi et en posant $Z\sqrt{e_1 - e_3} = u$, $h\sqrt{e_1 - e_2} = l$,

$$(17\ bis) \qquad i\,\mathrm{cn}(il + u) = \mathrm{cn}(il - u).$$

Cette équation développée par les formules d'addition devient

$$(17\ ter) \qquad \mathrm{T}(u) = \frac{i}{\mathrm{T}(il)}$$

en posant pour un moment

$$\mathrm{T}(u) = \frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}.$$

Cette fonction $\mathrm{T}(u)$ se rapproche beaucoup par ses propriétés de la tangente trigonométrique, de même que $\mathrm{sn}\,u$ et $\mathrm{cn}\,u$ ont des analogies avec le sinus et le cosinus ordinaires (¹).

(¹) Dans un Mémoire *Sur les fonctions elliptiques de première espèce* (*Nouvelles Annales*, 1898, p. 367), M. E. Iaggi proposait d'appeler cosinus et sinus elliptiques les fonctions $\frac{\mathrm{cn}}{\mathrm{dn}}$ et sn ; T serait la tangente elliptique.

Voici ces propriétés fondamentales, faciles à vérifier :

$$\mathrm{T}(u) \qquad \frac{d}{du}\mathrm{L}\,\mathrm{cn}\,u,$$

$$\mathrm{T}(u+2\mathrm{K}) \quad \mathrm{T}(u), \qquad \mathrm{T}(u+2i\mathrm{K}') = \mathrm{T}(u),$$

$$\mathrm{T}(u+\mathrm{K}) = -\frac{1}{\mathrm{T}(u)}, \qquad \mathrm{T}(u+i\mathrm{K}') = +\frac{1}{\mathrm{T}(u)},$$

$$\mathrm{T}(-u) = -\mathrm{T}(u).$$

La fonction $\mathrm{T}(u)$ est réelle et croît de o à ∞ lorsque u restant réel varie de o à K ; elle est imaginaire pure et $\frac{1}{i}\mathrm{T}(u)$ croît de o à ∞ lorsque u varie par valeurs imaginaires pures de o à $i\mathrm{K}'$.

Ces propriétés montrent immédiatement que l'équation $\Omega(\mathrm{Z}) = \mathrm{o}$ a deux racines dans le parallélogramme des demi-périodes, l'une sur le côté o, ω_1 $\left(\text{c'est celle qui correspond à } \frac{\gamma}{2}\right)$, l'autre sur le côté ω_3, $\omega_3 + \omega_1$ (c'est celle qui correspondra à Z_3). Ces deux racines sont symétriques par rapport au centre du parallélogramme, autrement dit, on devra avoir entre Z_3 et $\frac{\gamma}{2}$ la relation très simple

$$\frac{\gamma}{2} + \mathrm{Z}_3 = \omega_1 + \omega_3.$$

Il reste maintenant, en tenant compte de cette condition, à mettre dz sous une forme permettant l'intégration. Pour cela, nous nous servirons du fait que $\frac{dz}{d\mathrm{Z}}$ étant une fonction elliptique, on peut l'exprimer rationnellement en fonction de $\wp\mathrm{Z}$ et de $\wp'\mathrm{Z}$.

En nous servant des expressions trouvées pour t, $t-\alpha$, $t-\beta$ et dt, on peut mettre df sous la forme

$$(48) \qquad df = \frac{\wp'^2\frac{\gamma}{2}\left[\wp\mathrm{Z}_3 - \wp\frac{\gamma}{2}\right]}{\left[\wp\mathrm{Z}_1 - \wp\frac{\gamma}{2}\right]\left[\wp\mathrm{Z}_2 - \wp\frac{\gamma}{2}\right]} \frac{[\wp\mathrm{Z} - \wp\mathrm{Z}_1][\wp\mathrm{Z} - \wp\mathrm{Z}_2]}{[\wp\mathrm{Z} - \wp\mathrm{Z}_3]\left[\wp\mathrm{Z} - \wp\frac{\gamma}{2}\right]^3} \wp'\mathrm{Z}\,d\mathrm{Z}.$$

Or, on a

$$e^{i\Omega} = i\frac{\sigma(\mathrm{Z}_1+\mathrm{Z})\sigma(\mathrm{Z}_2+\mathrm{Z})}{\sigma(\mathrm{Z}_1-\mathrm{Z})\sigma(\mathrm{Z}_2-\mathrm{Z})}e^{2\eta_3\mathrm{Z}},$$

ce qui donne pour dz, en transformant en produits de fonctions σ les

numérateurs $\wp Z - \wp Z_1$ et $\wp Z - \wp Z_2$:

$$(49)\qquad dz = i\frac{\wp'^2\frac{\gamma}{2}\left[\wp Z_3 - \wp\frac{\gamma}{2}\right]}{\left[\wp Z_1 - \wp\frac{\gamma}{2}\right]\left[\wp Z_2 - \wp\frac{\gamma}{2}\right]} \times \frac{\wp' Z}{[\wp Z - \wp Z_3]\left[\wp Z - \wp\frac{\gamma}{2}\right]^3}\left[\frac{\sigma^2(Z_1+Z)\sigma^2(Z_2-Z)}{\sigma^2 Z_1\,\sigma^2 Z_2\,\sigma^4 Z}\right] e^{2\eta_2 Z}\,dZ,$$

ou encore, puisque $Z_1 = \omega_1 + ih$ et $Z_2 = \omega_3 - ih$, après quelques transformations,

$$(50)\qquad dz = i\frac{\wp'^2\frac{\gamma}{2}\left[\wp Z_3 - \wp\frac{\gamma}{2}\right]}{\left[\wp Z_1 - \wp\frac{\gamma}{2}\right]\left[\wp Z_2 - \wp\frac{\gamma}{2}\right]} \times \frac{\wp' Z}{[\wp Z - \wp Z_3]\left[\wp Z - \wp\frac{\gamma}{2}\right]^3}\left[\frac{\sigma_1(Z+ih)\sigma_3(Z-ih)}{\sigma_1 ih\,\sigma_3 ih\,\sigma^2 Z}\right]^2 dZ.$$

Considérons en particulier le crochet $\dfrac{\sigma_1(Z+ih)\sigma_3(Z-ih)}{\sigma_1 ih\,\sigma_3 ih\,\sigma^2 Z}$, il peu s'écrire encore (*voir* T. et M., form. XV) :

$$\frac{\sigma_1 Z\,\sigma_3 Z\,\sigma_1 ih\,\sigma_3 ih \quad (e_1 - e_3)\sigma Z\,\sigma_2 Z\,\sigma ih\,\sigma_2 ih}{\sigma^2 Z\,\sigma_1 ih\,\sigma_3 ih}.$$

Or, de l'équation

$$\Omega\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 0,$$

on tire facilement, en appliquant les mêmes formules,

$$i\frac{\sigma_1\frac{\gamma}{2}\,\sigma_3\frac{\gamma}{2}}{\sigma\frac{\gamma}{2}\,\sigma_2\frac{\gamma}{2}} = (e_1 - e_3)\frac{\sigma ih\,\sigma_2 ih}{\sigma_1 ih\,\sigma_3 ih},$$

ce qui donne pour le crochet en question

$$\frac{\sigma_1(Z+ih)\,\sigma_3(Z-ih)}{\sigma^2 Z\,\sigma_1 ih\,\sigma_3 ih} - \frac{\sigma_1 Z\,\sigma_3 Z\,\sigma\frac{\gamma}{2}\,\sigma_2\frac{\gamma}{2} - i\sigma Z\,\sigma_2 Z\,\sigma_1\frac{\gamma}{2}\,\sigma_3\frac{\gamma}{2}}{\sigma^2 Z\,\sigma\frac{\gamma}{2}\,\sigma_2\frac{\gamma}{2}}$$

$$= \sqrt{\wp Z - e_1}\sqrt{\wp Z - e_3} - i\sqrt{\wp Z - e_2}\sqrt{\wp\frac{\gamma}{2} - e_1}\,\frac{\sqrt{\wp\frac{\gamma}{2} - e_3}}{\sqrt{\wp\frac{\gamma}{2} - e_2}};$$

d'où enfin, après quelques transformations dont je pense inutile de reproduire le détail,

$$(51)\quad \left[\frac{\sigma_1(Z+ih)\sigma_3(Z-ih)}{\sigma^2 Z\,\sigma_1 ih\,\sigma_3 ih}\right]^2 = \left(\wp Z-\wp\frac{\gamma}{2}\right)\left[\wp Z-e_2-\frac{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{\wp\frac{\gamma}{2}-e_2}\right]-\frac{i}{2}\,\frac{\wp' Z\,\wp'\frac{\gamma}{2}}{\wp\frac{\gamma}{2}-e_2}$$

$$=\left[\wp Z-\wp\frac{\gamma}{2}\right]\left[\wp Z-\wp Z_3\right]-\frac{i}{2}\,\frac{\wp' Z\,\wp'\frac{\gamma}{2}}{\wp\frac{\gamma}{2}-e_2},$$

puisque $Z_3=\omega_1+\omega_3-\frac{\gamma}{2}=-\omega_2-\frac{\gamma}{2}$.

L'expression de dz prend alors la forme définitive suivante :

$$(52).\quad dz=iM\left[\frac{\wp'\frac{\gamma}{2}\wp' Z}{\left[\wp Z-\wp\frac{\gamma}{2}\right]^2}-\frac{i}{2}\,\frac{\wp'^2\frac{\gamma}{2}}{\wp\frac{\gamma}{2}-e_2}\,\frac{\wp'^2 Z}{\left[\wp Z-\wp\frac{\gamma}{2}\right]^3\left[\wp Z-\wp Z_3\right]}\right]dZ.$$

Le coefficient M, qui a pour expression

$$M=\frac{\wp'\frac{\gamma}{2}\left[\wp Z_3-\wp\frac{\gamma}{2}\right]}{\left[\wp Z_1-\wp\frac{\gamma}{2}\right]\left[\wp Z_2-\wp\frac{\gamma}{2}\right]},$$

est réel et positif, comme on le voit immédiatement; sa forme n'a du reste rien d'essentiel, on peut se donner les périodes ω_1 et ω_3 seulement par leur rapport τ, ce qui détermine les éléments du mouvement à une similitude près et le coefficient M arbitrairement choisi *a posteriori* en fixera la grandeur.

Le premier terme de dz s'intègre immédiatement, il reste alors à calculer l'intégrale

$$(53)\qquad I(Z)=\int_0^Z \frac{\wp'^2\frac{\gamma}{2}}{\wp\frac{\gamma}{2}-e_2}\,\frac{\wp'^2 Z}{\left[\wp Z-\wp\frac{\gamma}{2}\right]^3\left[\wp Z-\wp Z_3\right]}\,dZ.$$

Pour cela, nous décomposerons, suivant la méthode générale, la

fonction sous le signe somme en éléments simples. Cette fonction possède dans un parallélogramme des périodes les deux pôles simples Z_3 et $-Z_3$ et les deux pôles triples $\frac{\gamma}{2}$ et $-\frac{\gamma}{2}$.

Les parties principales correspondantes sont de la forme

$$\frac{D}{Z-Z_3} \quad \text{et} \quad -\frac{D}{Z+Z_3},$$

$$\frac{A}{\left(Z-\frac{\gamma}{2}\right)^3}+\frac{B}{\left(Z-\frac{\gamma}{2}\right)^2}+\frac{C}{Z-\frac{\gamma}{2}} \quad \text{et} \quad -\frac{A}{\left(Z+\frac{\gamma}{2}\right)^3}+\frac{B}{\left(Z+\frac{\gamma}{2}\right)^2}-\frac{C}{Z+\frac{\gamma}{2}},$$

et un calcul que je ne reproduis pas donne pour les coefficients les valeurs suivantes :

$$(54)\quad \left\{\begin{aligned} A &= \frac{\wp'\frac{\gamma}{2}}{\left(\wp\frac{\gamma}{2}-e_2\right)\left(\wp\frac{\gamma}{2}-\wp Z_3\right)},\\ B &= \frac{\wp''\frac{\gamma}{2}\left(\wp\frac{\gamma}{2}-\wp Z_3\right)-2\wp'^2\frac{\gamma}{2}}{2\left(\wp\frac{\gamma}{2}-e_2\right)\left(\wp\frac{\gamma}{2}-\wp Z_3\right)^2},\\ C &= \frac{\wp'\frac{\gamma}{2}\wp'''\frac{\gamma}{2}-\wp''2\frac{\gamma}{2}}{2\wp'\frac{\gamma}{2}\left(\wp\frac{\gamma}{2}-e_2\right)\left(\wp\frac{\gamma}{2}-\wp Z_3\right)}-\frac{\left[\wp''\frac{\gamma}{2}\left(\wp\frac{\gamma}{2}-\wp Z_3\right)-\wp'\frac{\gamma}{2}\right]\wp'\frac{\gamma}{2}}{\left(\wp\frac{\gamma}{2}-e_2\right)\left(\wp\frac{\gamma}{2}-\wp Z_3\right)^3},\\ D &= -\frac{\wp'Z_3\wp'^2\frac{\gamma}{2}}{\left(\wp\frac{\gamma}{2}-e_2\right)\left(\wp\frac{\gamma}{2}-\wp Z_3\right)^3}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on forme alors la fonction

$$C\left[\zeta\left(Z-\frac{\gamma}{2}\right)-\zeta\left(Z+\frac{\gamma}{2}\right)-2\zeta\frac{\gamma}{2}\right]+B\left[\wp\left(Z-\frac{\gamma}{2}\right)+\wp\left(Z+\frac{\gamma}{2}\right)-2\wp\frac{\gamma}{2}\right]$$
$$+\frac{A}{2}\left[\wp'\left(Z-\frac{\gamma}{2}\right)-\wp'\left(Z+\frac{\gamma}{2}\right)-2\wp'\frac{\gamma}{2}\right]+D\left[\zeta(Z-Z_3)-\zeta(Z+Z_3)+2\zeta Z_3\right],$$

cette fonction a les mêmes pôles que la fonction à intégrer avec les

mêmes parties principales, elle n'en diffère donc que par une constante, et comme elles s'annulent toutes deux pour $Z = 0$, elles sont identiques.

On en conclut, pour l'intégrale, la valeur

$$
\begin{aligned}
(55)\qquad I(Z) = C\left[-L\frac{\sigma\left(\frac{\gamma}{2}+Z\right)}{\sigma\left(\frac{\gamma}{2}-Z\right)}+2Z\zeta\frac{\gamma}{2}\right]
&-B\left[\zeta\left(Z-\frac{\gamma}{2}\right)+\zeta\left(Z+\frac{\gamma}{2}\right)+2Z\wp\frac{\gamma}{2}\right]\\
&+\frac{A}{2}\left[\wp\left(Z+\frac{\gamma}{2}\right)-\wp\left(Z-\frac{\gamma}{2}\right)-2Z\wp'\frac{\gamma}{2}\right]\\
&+D\left[-L\frac{\sigma(Z_3+Z)}{\sigma(Z_3-Z)}+2Z\zeta Z_3\right],
\end{aligned}
$$

les logarithmes ayant toujours la détermination nulle pour $Z = 0$.

Nous nous proposerons tout d'abord de calculer les éléments géométriques des obstacles. Nous appellerons l et l' les longueurs des deux lames, x et y leurs écartements horizontaux et verticaux (voir *fig.* 14). Pour obtenir ces éléments, nous aurons à évaluer les intégrales suivant trois côtés du rectangle des demi-périodes (en évitant au besoin les pôles par de petits détours intérieurs à son aire).

On obtient ainsi en se servant du Tableau donné page 22 les trois intégrales définies suivantes :

$$
(56)\quad
\left\{
\begin{aligned}
U = I(\omega_1+\omega_3)-I(\omega_3) &= C\left[-\eta_1\gamma+2\omega_1\zeta\frac{\gamma}{2}\right]-2B\left[\eta_1+\omega_1\wp\frac{\gamma}{2}\right]\\
&\quad -A\omega_1\wp'\frac{\gamma}{2}+D\left[\eta_1\gamma+i\pi-2\omega_1\zeta_2\frac{\gamma}{2}\right],\\
V = I(\omega_1)-I(\omega_1+\omega_3) &= C\left[+\eta_3\gamma-2\omega_3\zeta\frac{\gamma}{2}\right]+2B\left[\eta_3+\omega_3\wp\frac{\gamma}{2}\right]\\
&\quad +A\omega_3\wp'\frac{\gamma}{2}+D\left[-\eta_3\gamma-i\pi+2\omega_3\zeta_2\frac{\gamma}{2}\right],\\
W = I(\omega_3) &= C\left[-\eta_3\gamma-i\pi+2\omega_3\zeta\frac{\gamma}{2}\right]-2B\left[\eta_3+\omega_3\wp\frac{\gamma}{2}\right]\\
&\quad -A\omega_3\wp'\frac{\gamma}{2}+D\left[\eta_3\gamma-2\omega_3\zeta_2\frac{\gamma}{2}\right]
\end{aligned}
\right.
$$

et les éléments géométriques en question prennent la forme

$$(57)\quad \begin{cases} l = M\left[\dfrac{\wp'\frac{\gamma}{2}}{\wp\frac{\gamma}{2}-e_2} - \dfrac{\wp'\frac{\gamma}{2}}{\wp\frac{\gamma}{2}-e_1} + \dfrac{i}{2}V\right], \\ l' = M\left[-\dfrac{\wp'\frac{\gamma}{2}}{\wp\frac{\gamma}{2}-e_3} \cdot \quad + \dfrac{i}{2}W\right], \\ x = M\left[\quad .-\frac{1}{2}(U - D\pi i)\right], \\ y = M\left[\dfrac{\wp'\frac{\gamma}{2}}{\wp\frac{\gamma}{2}-e_3} - \dfrac{\wp'\frac{\gamma}{2}}{\wp\frac{\gamma}{2}-e_2} - D\dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Enfin, la largeur asymptotique Δ du jet intermédiaire, qui correspond dans l'intégration au petit détour que l'on a été obligé de faire pour éviter le pôle Z_3, a pour expression

$$(58)\quad \Delta = M\left[-D\frac{\pi}{2}\right].$$

Il reste maintenant à rendre les expressions ainsi écrites plus maniables en les transformant de façon à faire apparaître sur elles quelques résultats pratiques. Le calcul, assez long et dont je ne reproduis pas tous les détails, consiste, en passant par l'intermédiaire des fonctions ζ, à introduire finalement les fonctions de Jacobi.

Nous signalerons tout d'abord des relations simples entre les quantités U, V, W qui permettent de ne calculer qu'une d'entre elles. Si l'on forme les combinaisons $U\omega_3 + V\omega_1$ et $U\omega_3 - W\omega_1$, en tenant compte de la relation classique $2(\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1) = \pi i$, et qu'ensuite on combine ces expressions par addition et soustraction, on trouve les deux formules importantes suivantes :

$$(59)\quad \begin{cases} V - W = -\pi i[C + D], \\ V - W = -\pi i\left[(C - D)\left(1 - \dfrac{\gamma}{\omega_1}\right) - 2\dfrac{B}{\omega_1}\right] + 2[U - D\pi i]\tau. \end{cases}$$

Calcul des coefficients A, B, C, D. — Nous nous servirons surtout

dans ce calcul de la formule bien connue

$$\zeta_i\frac{\gamma}{2}-\zeta\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\,\frac{\wp'\frac{\gamma}{2}}{\wp\frac{\gamma}{2}-e_i}$$

et, pour la rapidité de l'écriture, nous poserons

$$\wp\frac{\gamma}{2}-e_i=\mathrm{X}_i.$$

On obtient ainsi

$$(60)\qquad \mathrm{A}=\frac{\wp'\frac{\gamma}{2}}{\left[\wp\frac{\gamma}{2}-e_2\right]\left[\wp\frac{\gamma}{2}-\wp\mathrm{Z}_3\right]}=\frac{\wp'\frac{\gamma}{2}}{\left[\wp\frac{\gamma}{2}-e_2\right]^2-(e_2-e_1)(e_2-e_3)}$$

$$=\frac{\wp'\frac{\gamma}{2}}{\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2+\mathrm{X}_2\mathrm{X}_3-\mathrm{X}_3\mathrm{X}_1}=\frac{2}{\zeta_3-\zeta_2+\zeta_1-\zeta}\quad(1).$$

De même

$$\mathrm{B}=\mathrm{A}\left[\frac{\wp''\frac{\gamma}{2}}{2\wp'\frac{\gamma}{2}}-\frac{\wp'\frac{\gamma}{2}}{\wp\frac{\gamma}{2}-\wp\mathrm{Z}_3}\right].$$

Or on a

$$\frac{1}{2}\wp''\frac{\gamma}{2}=\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2+\mathrm{X}_2\mathrm{X}_3+\mathrm{X}_3\mathrm{X}_1,$$

$$\frac{\wp''\frac{\gamma}{2}}{2\wp'\frac{\gamma}{2}}-\frac{\wp'\frac{\gamma}{2}}{\wp\frac{\gamma}{2}-\wp\mathrm{Z}_3}=\frac{\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2+\mathrm{X}_2\mathrm{X}_3+\mathrm{X}_3\mathrm{X}_1}{\wp'\frac{\gamma}{2}}-\frac{4\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2^2\mathrm{X}_3}{\wp'\frac{\gamma}{2}\left[\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2+\mathrm{X}_2\mathrm{X}_3-\mathrm{X}_1\mathrm{X}_3\right]}$$

$$=\frac{\left[\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2-\mathrm{X}_2\mathrm{X}_3+\mathrm{X}_3\mathrm{X}_1\right]\left[\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2-\mathrm{X}_2\mathrm{X}_3-\mathrm{X}_3\mathrm{X}_1\right]}{\wp'\frac{\gamma}{2}\left[\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2+\mathrm{X}_2\mathrm{X}_3-\mathrm{X}_1\mathrm{X}_3\right]}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\left[\zeta_3+\zeta_2-\zeta_1-\zeta\right]\left[\zeta_3-\zeta_2-\zeta_1+\zeta\right]}{\left[\zeta_3-\zeta_2+\zeta_1-\zeta\right]};$$

d'où

$$(61)\qquad \mathrm{B}=\frac{\left[\zeta_3+\zeta_2-\zeta_1-\zeta\right]\left[\zeta_3-\zeta_2-\zeta_1+\zeta\right]}{\left[\zeta_3-\zeta_2+\zeta_1-\zeta\right]^2}.$$

---

(1) Les arguments qui ne sont pas explicitement écrits sont égaux à $\frac{\gamma}{2}$.

De même, en remplaçant $\wp'''$ par $12\wp\wp'$, on aura

$$C + D = \frac{12\wp\frac{\gamma}{2}\wp'^2\frac{\gamma}{2} - \wp''^2\frac{\gamma}{2}}{2\wp'\frac{\gamma}{2}\left(\wp\frac{\gamma}{2} - e_2\right)\left(\wp\frac{\gamma}{2} - \wp Z_3\right)} - \wp\frac{\gamma}{2}\,\frac{\wp''\frac{\gamma}{2}\left(\wp\frac{\gamma}{2} - \wp Z_3\right) - \wp'\frac{\gamma}{2}\left(\wp'\frac{\gamma}{2} - \wp' Z_3\right)}{\left(\wp\frac{\gamma}{2} - e_2\right)\left(\wp\frac{\gamma}{2} - \wp Z_3\right)^3}$$

ou encore, en se servant de la formule d'addition de $\wp Z$ (T. et M., 2e formule du groupe CIII, dans laquelle on fait $u = \frac{\gamma}{2}$, $a = Z_3$),

$$(62)\qquad C + D = \frac{12\wp\wp'^2 - \wp''^2}{2\wp'(\wp - e_2)\left(\wp\frac{\gamma}{2} - \wp Z_3\right)} - \frac{2\wp'}{\wp\frac{\gamma}{2} - \wp Z_3}$$

$$\frac{4\wp'^2(2\wp + e_2) - \wp''^2}{2\wp'^2(\wp - e_2)\left(\wp\frac{\gamma}{2} - \wp Z_3\right)}$$

$$- \frac{16X_1X_2X_3(X_1 + X_3) - 4[X_1X_2 + X_2X_3 + X_3X_1]}{2\wp'[X_1X_2 + X_2X_3 - X_3X_1]}$$

$$= -\frac{2[X_1X_2 + X_2X_3 - X_3X_1]}{\wp'} = -[\zeta_3 - \zeta_2 + \zeta_1 - \zeta].$$

De même, on obtient facilement, puisque $Z_3 = -\omega_2 - \frac{\gamma}{2}$,

$$\wp' Z_3 = \frac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}{\left(\wp\frac{\gamma}{2} - e_2\right)^2}\wp'\frac{\gamma}{2};$$

d'où

$$(63)\qquad D = -(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)\Lambda^3 = -8\frac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}{[\zeta_3 - \zeta_2 + \zeta_1 - \zeta]^3}.$$

Enfin, en combinant les formules

$$\zeta u - \zeta_3 u = \sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\mathrm{cn}\lambda u\,\mathrm{dn}\lambda u}{\mathrm{sn}\lambda u}$$

$$\zeta_1 u - \zeta_3 u = -\sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\mathrm{sn}\lambda u\,\mathrm{dn}\lambda u}{\mathrm{cn}\lambda u} \qquad (\lambda = \sqrt{e_1 - e_3}),$$

$$\zeta_2 u - \zeta_3 u = -k^2\sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\mathrm{sn}\lambda u\,\mathrm{cn}\lambda u}{\mathrm{dn}\lambda u}$$

qui résultent d'une dérivation logarithmique des formules reliant sn, cn, dn à pu et en posant

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\omega_1}{2} + \frac{\delta}{\sqrt{e_1 - e_3}} \qquad \left(-\frac{K}{2} < \delta < +\frac{K}{2},\ K = \omega_1 \sqrt{e_1 - e_3} \right),$$

on obtient finalement les formules très simples ci-dessous :

$$(64) \quad \begin{cases} A = -\dfrac{1}{\sqrt{e_1 - e_2}} \operatorname{cn} 2\delta, \\ B = \dfrac{1}{k'} \operatorname{sn} 2\delta \operatorname{dn} 2\delta, \\ C + D = 2\sqrt{e_1 - e_2}\, \dfrac{1}{\operatorname{cn} 2\delta}, \\ C - D = 2\sqrt{e_1 - e_2}\, \dfrac{1}{\operatorname{cn} 2\delta} \left[1 + \dfrac{k^2}{k'^2} \operatorname{cn}^4 2\delta \right], \\ D = -\dfrac{e_2 - e_3}{\sqrt{e_1 - e_2}} \operatorname{cn}^3 2\delta. \end{cases}$$

En se servant de l'identité connue

$$2\zeta\gamma = \zeta\frac{\gamma}{2} + \zeta_1\frac{\gamma}{2} + \zeta_2\frac{\gamma}{2} + \zeta_3\frac{\gamma}{2},$$

on peut encore écrire la quantité $U - D\pi i$ sous la forme

$$(65) \quad \begin{cases} U - D\pi i = (C - D)[\omega_1\zeta\gamma - \eta_1\gamma] - 2B(\eta_1 + \omega_1 e_1) + \omega_1 L \\ \text{avec} \\ L = (C + D)(\zeta - \zeta_2) + \dfrac{1}{2}(C - D)(\zeta - \zeta_1 + \zeta_2 - \zeta_3) - 2B\left(p\frac{\gamma}{2} - e_1\right) - A p'\frac{\gamma}{2}. \end{cases}$$

Le calcul ne présente alors plus de difficultés, en se servant des formules faciles à établir :

$$p - e_1 = -(e_1 - e_3)\frac{\zeta - \zeta_3}{\zeta_1 - \zeta_3}, \qquad p' = 2(p - e_1)(\zeta_1 - \zeta),$$

on obtient, après une réduction qui consiste essentiellement, comme nous allons le voir, dans la disparition des termes pairs en δ,

$$(66) \qquad L = 2(e_1 - e_3)k' \frac{\operatorname{sn} 2\delta \operatorname{dn} 2\delta (1 + \operatorname{cn}^2 2\delta)}{\operatorname{cn}^2 2\delta}.$$

Résumé des formules. — Ce calcul donne en résumé les formules que je groupe ci-dessous, et auxquelles il faut adjoindre les formules (64) donnant les valeurs des coefficients A, B, C, D :

$$(67)\quad \begin{cases} l = \mathrm{M}\left[2\sqrt{e_1-e_2}\,\dfrac{1+\mathrm{sn}\,2\delta}{\mathrm{cn}\,2\delta} + \dfrac{i}{2}\,\mathrm{V}\right] \\ l' = \mathrm{M}\left[2\sqrt{e_1-e_2}\,\dfrac{1-\mathrm{sn}\,2\delta}{\mathrm{cn}\,2\delta} + \dfrac{i}{2}\,\mathrm{W}\right] \\ x = \mathrm{M}\left[-\dfrac{1}{2}(\mathrm{U}-\mathrm{D}\pi i)\right] \\ y = \mathrm{M}\left[2\dfrac{\sqrt{e_1-e_2}}{k'}\,\dfrac{\mathrm{dn}\,2\delta}{\mathrm{cn}\,2\delta}\,k' - \mathrm{D}\,\dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases} \qquad \left(\Delta = -\mathrm{MD}\,\frac{\pi}{2}\right);$$

$$(68)\quad \begin{cases} \mathrm{V}+\mathrm{W} = \pi i(\mathrm{C}+\mathrm{D}), \\ \mathrm{V}-\mathrm{W} = \pi i\left[(\mathrm{C}-\mathrm{D})\,\dfrac{2\delta}{\omega_1\sqrt{e_1-e_3}} + \dfrac{2\mathrm{B}}{\omega_1}\right] + 2\tau(\mathrm{U}-\mathrm{D}\pi i); \end{cases}$$

$$(69)\quad \mathrm{U}-\mathrm{D}\pi i = (\mathrm{C}-\mathrm{D})\left[\omega_1\zeta_1\,\frac{2\delta}{\sqrt{e_1-e_3}} - \frac{2\delta\eta_1}{\sqrt{e_1-e_3}}\right] - 2\mathrm{B}(\eta_1+\omega_1 e_1)$$
$$+ 2\omega_1(e_1-e_3)\,k'\,\frac{\mathrm{sn}\,2\delta\,\mathrm{cn}\,2\delta\,(1+\mathrm{cn}^2\,2\delta)}{\mathrm{cn}^2\,2\delta}.$$

Considérations de symétrie. — Les formules que nous venons d'établir sont susceptibles d'une vérification intéressante. Si l'on change δ en $-\delta$ $\left(\text{ou } \frac{\gamma}{2} \text{ en } \omega_1 - \frac{\gamma}{2}\right)$, la disposition des différents points $\frac{\gamma}{2}$, Z_1, Z_2, Z_3 dans leur plan se trouve renversée par une symétrie autour de la parallèle à l'axe imaginaire d'abscisse $\frac{\omega_1}{2}$; et l'on voit immédiatement que les coefficients A, C, D ne sont pas modifiés par ce changement, tandis que B et $\mathrm{U}-\mathrm{D}\pi i$ changent de signe et que V et W se permutent (¹). Il s'ensuit que, dans le plan (z), x change de signe, y ne change pas et que l et l' se permutent. Les deux mouvements ainsi créés ne diffèrent donc que par une symétrie autour d'un axe horizontal échangeant les deux plans.

(¹) Il est à peine besoin de dire que les calculs ne se sont pas présentés sous la forme définitive dont j'ai donné un exposé synthétique, mais qu'au contraire, c'est cette symétrie qui, pressentie et poursuivie, a conduit aux simplifications signalées.

Cas particulier $\delta = 0$. — Les considérations précédentes montrent que le cas particulier $\delta = 0$ conduit à un mouvement présentant un axe de symétrie, les deux plans ayant alors même longueur et étant dans le prolongement l'un de l'autre. C'est là un cas particulier qui a déjà été étudié par M. H. Villat, d'abord dans sa Thèse pour un obstacle de forme générale, puis, dans le cas même qui nous occupe, dans un Mémoire ultérieur (¹).

Les formules se simplifient alors considérablement et l'on trouve en particulier, N étant un coefficient positif :

$$(70)\qquad \begin{cases} l = l' = N(4 + \pi) \\ y = N\left[4\dfrac{1 - k'}{k'} + \pi\dfrac{k^2}{k'^2}\right] \\ \Delta = N\pi\dfrac{k^2}{k'^2} \end{cases} \qquad (x = 0).$$

Le coefficient de contraction du filet fluide intermédiaire a pour valeur

$$(71)\qquad \frac{\Delta}{y} = \frac{\pi}{\dfrac{4k'}{1 + k'} + \pi}.$$

Il varie entre 1 et la valeur $\dfrac{\pi}{\pi + 2}$ qu'il aurait dans le cas limite où la grandeur des deux plans serait considérable par rapport à l'intervalle qui existe entre eux, et ce résultat est d'accord avec des travaux antérieurs (²).

Retour au cas général. Étude de la pression. — Par un raisonnement identique à celui qui a déjà été exposé en détail plus haut, on trouve que la valeur de la pression supportée par l'obstacle supérieur a pour expression

$$P' = -\frac{1}{2i}\int_{-\omega_1}^{+\omega_1} e^{i\Omega}\, df$$

(¹) H. Villat, *Thèse* (*Annales de l'École Normale*, 1911, p. 203), et *Sur un calcul de résistance dans un courant fluide limité par un mur* (*Annales de l'École Normale*, 1918, p. 251).

(²) *Voir* Kirchhoff, *Vorlesungen über Mathematische Physik*, t. I, 22ᵉ Leçon, p. 295.

et un calcul simple donne pour cette intégrale

$$P' = M\frac{i}{2}W. \tag{72}$$

La pression sur l'obstacle inférieur s'en déduira par le changement de δ en $-\delta$, d'où

$$P = M\frac{i}{2}V. \tag{72 bis}$$

De l'ensemble de ces formules nous allons tirer d'abord une coïncidence fort remarquable; on a, en effet,

$$\begin{cases} P + P' = M\dfrac{i}{2}(V+W) = M\dfrac{\pi}{2}(C+D) = M\pi\dfrac{\sqrt{e_1-e_2}}{\operatorname{cn} 2\delta}, \\ l + l' = M\left[4\dfrac{\sqrt{e_1-e_2}}{\operatorname{cn} 2\delta} + \dfrac{i}{2}(V+W)\right] = M(4+\pi)\dfrac{\sqrt{e_1-e_2}}{\operatorname{cn} 2\delta}, \end{cases} \tag{73}$$

ce qui conduit à

$$\frac{P+P'}{l+l'} = \frac{\pi}{4+\pi}. \tag{74}$$

Autrement dit, *la pression moyenne par unité de surface pour l'ensemble des deux plans est la même que pour le plan normal unique* (¹).

Étude de la disposition voisine du cas symétrique. — Nous allons terminer ce Chapitre en examinant d'un peu plus près la disposition du plan (z), en nous bornant au cas où δ est très petit (nous le supposerons positif). En négligeant les puissances de δ supérieures à la première, les formules trouvées plus haut deviennent

$$\begin{cases} l = M\left[\left(2+\dfrac{\pi}{2}\right)\sqrt{e_1-e_2} + 4\delta\left(\sqrt{e_1-e_2} + \dfrac{1}{k'}\dfrac{\eta_3+\omega_3 e_2}{i}\right)\right], \\ l' = M\left[\dfrac{4\delta}{k'}(\eta_3+\omega_3 e_2)\right], \\ P = M\left[\dfrac{\pi}{2}\sqrt{e_1-e_2} + \dfrac{4\delta}{k'}\dfrac{\eta_3+\omega_3 e_2}{i}\right] \end{cases} \tag{75}$$

(l' et P' s'obtiendraient en changeant δ de signe).

(¹) Ce résultat avait déjà été obtenu par M. Villat, mais seulement dans le cas particulier signalé plus haut, cas où l'on a $\frac{P}{l} = \frac{P'}{l'}$ et où $\frac{\pi}{4+\pi}$ donne la valeur de la pression par unité de surface pour chacun des plans.

Il est facile de reconnaître quels sont, dans ces formules, les signes des coefficients de δ. En effet, en introduisant les constantes de Jacobi et de Legendre, on a (T. et M., form. CII, 1 et 2) :

$$\eta_1+\omega_1 e_2 = \sqrt{e_1-e_3}\,[\mathrm{E}-k'^2\mathrm{K}] = \sqrt{e_1-e_3}\,k^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} > 0,$$

$$\frac{\eta_3+\omega_3 e_2}{i} = -\sqrt{e_1-e_3}\,[\mathrm{E}'-k^2\mathrm{K}'] = -\sqrt{e_1-e_3}\,k'^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}} < 0,$$

$$k'\sqrt{e_1-e_2}+\frac{\eta_3+\omega_3 e_2}{i} = \sqrt{e_1-e_3}\,k'^2\left[1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}\right].$$

Cette dernière quantité est évidemment positive, car l'intégrale qui y figure est inférieure à l'unité, valeur qu'elle prend lorsque k' est égal à 1.

On en déduit immédiatement les résultats suivants :

Lorsque les deux plans sont dans une disposition susceptible de comporter des sillages illimités et voisine de la disposition symétrique :

1° C'est le plus grand des deux plans qui est en avant;

2° La pression par unité de surface sur le plus grand plan est inférieure à $\frac{\pi}{4+\pi}$; elle est supérieure à cette quantité sur le plus petit plan.

Autrement dit, dans ce cas particulier, la présence du plan d'arrière diminue la pression le long du plan d'avant.

Étude du cas particulier où l'un des plans est petit par rapport à l'autre. — Nous allons encore étudier maintenant le cas où l'un des deux plans (le plan inférieur par exemple) est très petit par rapport à l'autre. Nous obtiendrons ce cas en supposant que, dans la formule (39) trouvée précédemment, les nombres a, α, b viennent se confondre et l'on vérifie facilement que cela revient à dire que la période $2\omega_1$ augmente indéfiniment, la période $2\omega_3$ restant finie.

Comme dans l'étude précédente, nous ferons le passage à la limite ainsi défini sans nous préoccuper tout d'abord de l'horizontalité du

jet intermédiaire, quitte à envisager cette condition supplémentaire à la fin des calculs.

Les formules classiques de dégénérescence des fonctions elliptiques (*voir* T. et M., form. CXXII) permettent de résoudre facilement ce problème.

Nous poserons

$$\frac{Zi}{2\omega_3} = v, \qquad \frac{hi}{2\omega_3} = l \quad \left(0 < l < \frac{1}{2}\right), \qquad \frac{iZ_3}{2\omega_3} = \frac{i}{2} + m \quad (m > 0),$$
$$\frac{\gamma i}{2\omega_3} = k \qquad (k > 0) \quad (^1),$$

ce qui revient à remplacer le domaine (Z) par un domaine (v) entièrement analogue, à cela près que le côté vertical de droite est rejeté à l'infini.

La formule (43 *bis*) donnant Ω deviendra alors

$$\Omega = iL\frac{\operatorname{ch}\pi(il - v)}{\operatorname{ch}\pi(il + v)} + \frac{\pi}{2}. \tag{76}$$

Un calcul simple, dont je ne transcris pas ici le détail, donnera de même la valeur de df :

$$df = -M_1 \frac{\operatorname{ch}\pi(il - v)\operatorname{ch}\pi(il + v)\operatorname{sh}2\pi v}{\operatorname{sh}^3\pi\left(v - \frac{k}{2}\right)\operatorname{sh}^3\pi\left(v + \frac{k}{2}\right)\operatorname{ch}\pi(v + m)\operatorname{ch}\pi(v - m)}\,dv; \tag{77}$$

d'où nous déduirons par conséquent

$$dz = -M_1 i \frac{\operatorname{ch}^2\pi(il - v)\operatorname{sh}2\pi v}{\operatorname{sh}^3\pi\left(v - \frac{k}{2}\right)\operatorname{sh}^3\pi\left(v + \frac{k}{2}\right)\operatorname{ch}\pi(v + m)\operatorname{ch}\pi(v - m)}\,dv, \tag{78}$$

M_1 étant un coefficient réel positif dont la donnée pourra remplacer celle de ω_3.

Enfin la condition (44 *bis*) : $\Omega\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 0$, deviendra

$$-iL\frac{\operatorname{ch}\pi\left(il - \frac{k}{2}\right)}{\operatorname{ch}\pi\left(il + \frac{k}{2}\right)} + \frac{\pi}{2} = 0. \tag{79}$$

(1) Naturellement k n'a rien de commun avec le module des fonctions elliptiques introduites précédemment.

En résumé, le problème dépendra de quatre paramètres : k, l, m, M_1. Pour les déterminer, il faudra adjoindre à la relation (79) les conditions de position provenant du plan (z), conditions qui sont au nombre de trois (longueur de l'obstacle supérieur et coordonnées de l'obstacle inférieur réduit à un point). Comme dans le cas général, le problème est donc déterminé, *sans que l'on puisse fixer à l'avance l'inclinaison du jet intermédiaire.*

Il est facile ici d'expliciter entièrement le mouvement dans le plan (z) et d'étudier ses particularités. Tout d'abord, la relation (79) permet de tirer facilement l en fonction de k par la formule

$$\operatorname{tang} \pi l = \coth \pi \frac{k}{2}. \tag{80}$$

Si alors, dans la formule (78) donnant dz, nous faisons le nouveau changement de variable

$$\coth \pi v = u$$

en posant aussi

$$\operatorname{th} \pi m = \mu, \qquad \operatorname{tang} \pi l = \coth \pi \frac{k}{2} = \rho \qquad (0 < \mu < 1 < \rho),$$

on aura

$$dz = - N_1 i \frac{(u - i\rho)^2 (u^2 - 1)}{(u^2 - \rho^2)^3 (u^2 - \mu^2)} u \, du, \tag{81}$$

N_1 étant un nouveau coefficient réel positif de grandeur pouvant remplacer le précédent M_1.

Ce même changement de variable conduirait aussi à la nouvelle valeur de Ω

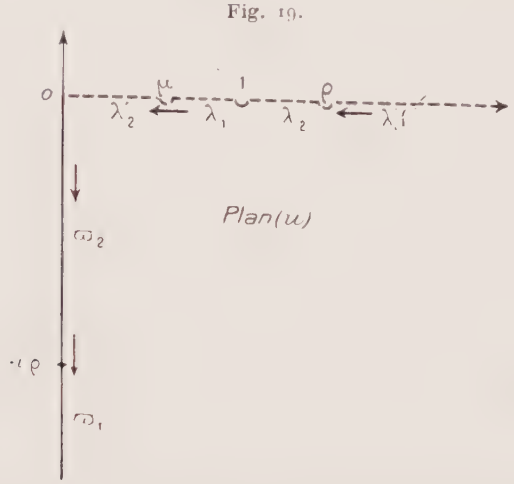
$$e^{i\Omega} = i \frac{u - i\rho}{u + i\rho}. \tag{82}$$

Il serait facile, par une décomposition en éléments simples, de calculer explicitement z, mais ce calcul ne nous serait pas d'une grande utilité; nous nous contenterons d'étudier de façon précise la forme des différentes lignes de jet.

Nous remarquerons tout d'abord pour cela que la transformation $\coth \pi v = u$ fait correspondre de façon conforme la demi-bande illimitée constituant le domaine (v) à un certain domaine dans le plan (u). On vérifie sans difficultés que ce nouveau domaine (u) est formé du

quatrième quadrant du plan (u), la partie positive de l'axe réel correspondant aux lignes λ'_2, λ_1, λ_2, λ'_1, la partie inférieure de l'axe imaginaire aux lignes ϖ'_2 et ϖ'_1 (voir *fig.* 19).

Fig. 19.



On aura donc les différentes lignes de jet en faisant varier u par valeurs réelles et positives et, en appelant x et y les coordonnées d'un point quelconque de ces lignes, on obtiendra la représentation paramétrique suivante :

$$(83)\qquad \begin{cases} x = -2N_1\rho\displaystyle\int_0^u \frac{(u^2-1)u^2}{(u^2-\rho^2)^2(u^2-\mu^2)}\,du, \\ y = -N_1\displaystyle\int_0^u \frac{(u^2-1)u}{(u^2-\rho^2)^2(u^2-\mu^2)}\,du, \end{cases}$$

en prenant comme origine le point de départ de la ligne λ'_2.

La considération de ces deux intégrales suffit, sans qu'il soit besoin de les mettre sous forme finie, pour reconnaître la forme générale de ces lignes.

Nous aurons tout d'abord

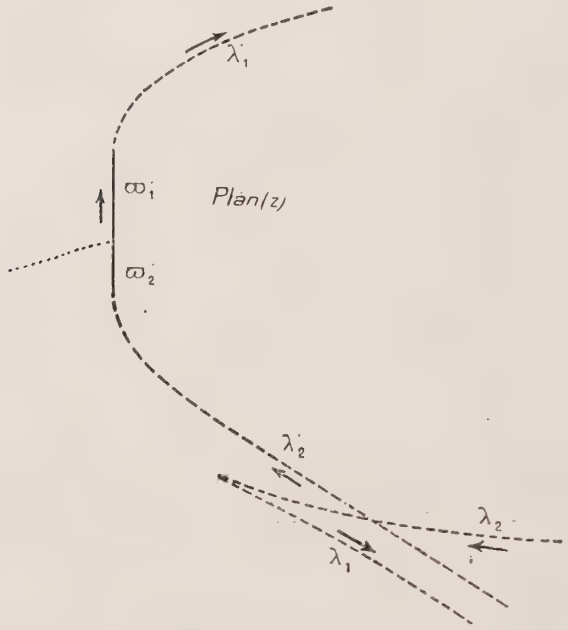
$$(84)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{u^2-\rho^2}{2\rho u} \quad (1).$$

(1) On vérifierait facilement que cette valeur, qui doit représenter $\operatorname{tang}\Theta$, est bien d'accord avec celle que l'on tirerait de la formule (82).

Suivons alors les variations de u en partant de l'origine.

Si u varie de o à μ, on obtient une ligne partant du bord inférieur de l'obstacle fini avec une tangente verticale, tournant toujours sa

Fig. 20.



concavité vers la droite, ayant une direction asymptotique de coefficient angulaire $\frac{\mu^2-\rho^2}{2\rho\mu}$ essentiellement négatif, et l'on constate sans peine que l'intégrale $y-\frac{\mu^2-\rho^2}{2\rho\mu}x$ reste finie quand u tend vers μ, donc qu'il y a une asymptote. C'est la ligne λ_2'.

Si le point u évite par un petit demi-cercle le pôle simple $u=\mu$, l'intégrale z varie de la quantité

$$N_1\frac{\pi}{2}\frac{\mu^2-1}{(\mu^2-\rho^2)^3}(\mu-i\rho)^2 \tag{85}$$

représentant, au facteur πi près, la moitié du résidu relatif à ce pôle, et par suite le point (z) éprouve un déplacement normal à la direction

asymptotique précédente, sensiblement rectiligne (si le demi-cercle est très petit), et ayant pour longueur

$$\Delta = N_1 \frac{\pi}{2} \frac{(1-\mu^2)(\mu^2+\rho^2)}{(\mu^2-\rho^2)^3}. \qquad (85\,bis)$$

Cette dernière quantité est *la largeur asymptotique de la veine comprise entre* λ'_2 et λ_1.

Si u varie à nouveau par valeurs réelles de μ à 1, le point (z) décrit la branche de courbe λ_1, tournant sa concavité vers la gauche et ayant une asymptote parallèle à la précédente (à la distance Δ de celle-ci).

Pour $u = 1$, on obtient un point de rebroussement (c'est ce point qui constitue le petit obstacle $\varpi_1\varpi_2$ réduit à zéro) avec une tangente de coefficient angulaire $\frac{1-\rho^2}{2\rho}$, négatif, inférieur en valeur absolue à celui de l'asymptote.

Si u varie de 1 à ρ, on obtient la branche λ_2, partant du point de rebroussement, tournant sa concavité vers la droite et ayant une direction asymptotique horizontale avec une branche parabolique.

Si le point (u) évite le pôle triple $u = \rho$ par un petit demi-cercle, le point (z) décrit un cercle de rayon très grand entourant tout le fluide en mouvement.

Enfin, si u varie de ρ à ∞, on obtient la ligne λ'_1, sans cesse concave vers la droite, ayant aussi une branche parabolique de direction asymptotique horizontale et aboutissant avec une tangente verticale à l'extrémité supérieure de l'obstacle fini.

On vérifierait sans peine que le point d'arrivée est bien sur la verticale du point de départ et aussi, comme il arrive constamment dans toutes ces théories, que les rayons de courbure en ces deux points sont nuls.

Il y a alors *recouvrement* de plusieurs parties du plan (z), la veine fluide qui passe entre l'obstacle supérieur et le point de rebroussement se superpose à la masse du fluide qui passe au-dessous de ce dernier point (voir *fig.* 20).

J'ai tenu à décrire de façon complète ce cas particulier parce qu'il met nettement en évidence les singularités qui peuvent se produire dans les passages à la limite. Au fond, la solution que nous venons de

former ainsi, bien qu'inacceptable *au point de vue physique* (1), à cause du recouvrement mentionné ci-dessus, n'en est pas moins, *au point de vue mathématique*, une solution répondant aux équations du mouvement avec un *plan normal unique*, et cette solution renferme une infinité continue de mouvements dépendant de deux paramètres, puisque le point de rebroussement, dans des limites très larges, peut être arbitrairement déplacé.

Si nous étudions de plus près maintenant l'inclinaison de la veine comprise entre λ_2' et λ_1, dont le coefficient angulaire est égal à $\frac{\mu^2-\rho^2}{2\mu\rho}$, nous voyons qu'il est impossible qu'elle soit jamais horizontale, sauf dans le cas particulier où l'on a $\mu=\rho=1$.

Or, dans ce cas, le point de rebroussement est rejeté à l'infini, comme on le voit immédiatement sur les intégrales, et l'on obtient comme limite la solution classique de Helmholtz pour le plan normal.

Enfin, si μ tend vers 1, ρ restant quelconque, on constate que la largeur asymptotique du jet intermédiaire tend vers zéro, on retombe encore sur la solution classique que nous venons de mentionner, comme on le voit en faisant le changement de paramètre $\frac{u}{\rho}=u'$, et l'on obtient ainsi un passage à la limite très caractéristique : les deux lignes λ_2' et λ_2 tendent à se raccorder pour former la ligne de jet inférieure du sillage unique, le point de jonction est la position limite du point de rebroussement; la ligne λ_1 et la branche infinie de λ_2' tendent à se confondre avec la tangente en ce point à la ligne de jet, en comprimant entre elles, jusqu'à ce qu'elle disparaisse, la veine fluide intermédiaire du cas général (*voir* la figure 20 qui a été dessinée dans une disposition voisine de ce cas limite).

---

(1) On peut cependant remarquer qu'une expérience rudimentaire peut donner naissance à des phénomènes analogues à ceux que nous venons de décrire. Si l'on fait couler un jet d'eau assez puissant dans un vase jusqu'à ce que celui-ci déborde, il se forme des nappes de liquide s'échappant des bords. Si, dans une partie à peu près plane d'une de ces nappes, on place un obstacle, la nappe interrompue forme derrière lui deux lignes de jet rappelant la disposition classique du mouvement avec obstacle unique. Si maintenant on introduit dans le liquide en chute une tige mince, il se détache une veine liquide qui, si la tige n'est pas tout à fait normale à la nappe, peut se superposer à celle-ci, en passant légèrement au-dessus par exemple, et l'ensemble des lignes ainsi constituées présente très approximativement la disposition que nous venons de trouver.

En résumé, nous tirons de cette étude la conséquence importante suivante :

Dans le mouvement, uniforme à l'infini, d'un fluide avec deux obstacles plans normaux au courant, dont l'un est très petit par rapport à l'autre et dont l'écartement n'est pas considérable par rapport à ce même obstacle, la disposition avec des lignes de jet s'étendant à l'infini derrière chaque plan ne peut *jamais* conduire à une solution physiquement acceptable.

II. — Étude du mouvement avec deux plans normaux au courant dans l'hypothèse où les lignes de jet de l'un des plans se raccordent avec l'autre.

La seconde hypothèse que nous avons à envisager dans le mouvement d'un fluide avec deux obstacles est celle où les deux lignes de jet issues de l'un des plans viennent se raccorder avec l'autre. Il existe alors une plage de fluide inerte à l'arrière du second plan, de pression p_0, entièrement analogue à celles que nous avons déjà étudiées, limitée par deux lignes de discontinuité sur lesquelles la vitesse est égale à l'unité, et en plus une seconde plage de fluide au repos, comprise entre les deux plans, de pression supérieure à la précédente, limitée par deux lignes de discontinuité λ'_1 et λ'_2 sur lesquelles la vitesse a une valeur inférieure à 1, valeur que nous appellerons comme précédemment e^{-a} $(a > 0)$.

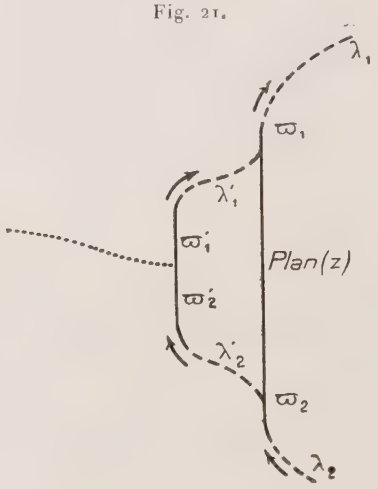
Il n'y aura ici qu'une ligne de courant se divisant en un point de l'obstacle d'avant, et par suite le domaine correspondant au fluide en mouvement dans le plan (f) comprendra encore la totalité de ce plan avec une seule coupure partant de l'origine, le long de la partie positive de l'axe des φ.

Le domaine du plan (Ω) se construit facilement; il est formé de la demi-bande comprise entre les deux droites $\Theta = \pm \frac{\pi}{2}$ et située au-dessous de l'axe réel, entaillée par deux coupures horizontales portées par la droite $T = -a$, coupures dont les extrémités correspondent aux points d'inflexion des lignes λ'_1 et λ'_2 (voir *fig.* 24).

Ceci posé, conformément à la méthode générale, la transformation $f = t^2$ fera correspondre au domaine (f) la partie supérieure

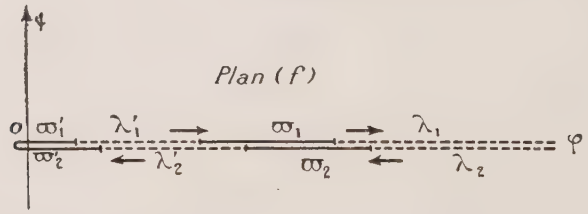
du demi-plan (t); aux points de séparation des différentes lignes ϖ et λ correspondront pour t des points d'affixes c', b', a', a, b, c; aux

Fig. 21.



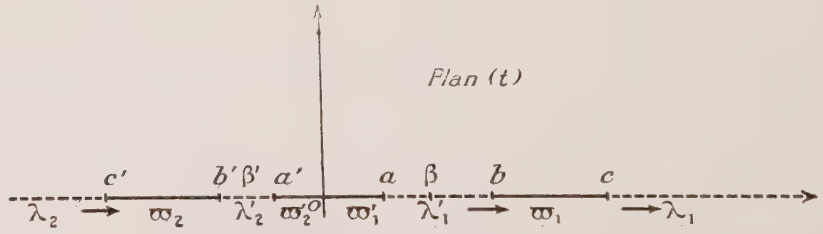
points d'inflexion de λ'_2 et λ'_1 des points d'affixes β' et β; et ces diffé-

Fig. 22.



rents nombres seront réels et rangés dans l'ordre $c', b', \beta', a', o, a, \beta, b, c$.

Fig. 23.

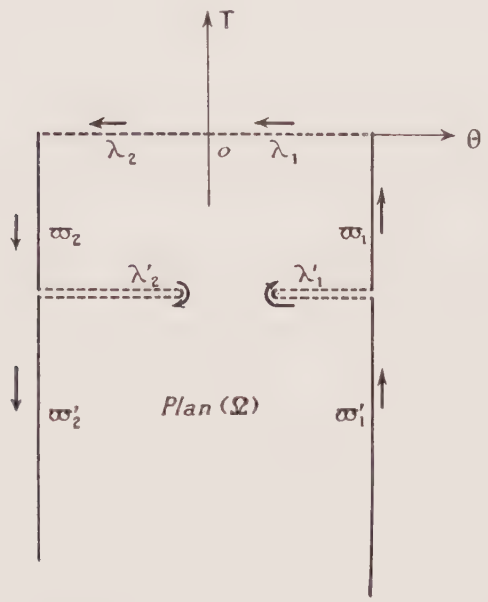


L'application conforme du domaine (Ω) sur le domaine (t) se fait

alors au moyen de l'intégrale

$$(86)\qquad \Omega = -K\int_{\infty}^{t} \frac{(t-\beta)(t-\beta')}{t\sqrt{(t-c')(t-b')(t-a')(t-a)(t-b)(t-c)}}\,dt,$$

Fig. 24.



le radical ayant la détermination positive pour les grandes valeurs réelles et positives de t, et K désignant une constante réelle et positive.

Conditions provenant du plan (Ω). — Ces conditions se traduisent par les équations suivantes :

$$\Omega(c') = -\frac{\pi}{2}, \qquad \Omega(c) = +\frac{\pi}{2},$$

$$\Omega(b') = -\frac{\pi}{2} - a i, \qquad \Omega(b) = +\frac{\pi}{2} - a i,$$

$$\Omega(a') = -\frac{\pi}{2} - a i, \qquad \Omega(a) = +\frac{\pi}{2} - a i.$$

On voit immédiatement que ces conditions se réduisent aux sui-

vantes :

$$-\mathrm{K}\int_{\infty}^{c'} = -\frac{\pi}{2}, \qquad -\mathrm{K}\int_{\infty}^{c} = +\frac{\pi}{2},$$

$$-\mathrm{K}\int_{c'}^{b'} = -\mathrm{a}\,i, \qquad -\mathrm{K}\int_{c}^{b} = -\mathrm{a}\,i,$$

$$-\mathrm{K}\int_{b'}^{a'} = 0, \qquad -\mathrm{K}\int_{b}^{a} = 0.$$

Les constantes du problème sont au nombre de dix : les valeurs remarquables de $t(a, b, c, a', b', c', \beta, \beta')$ et les deux constantes K et a. Pour les déterminer, il faut adjoindre aux équations ci-dessus les équations provenant des conditions de position et de grandeur données par le plan (z). Ces conditions sont au nombre de cinq : longueur du plan d'avant et coordonnées par rapport à l'une de ses extrémités des deux extrémités du plan d'arrière (1).

On a donc en tout *dix* paramètres reliés par *onze* équations qui sont évidemment indépendantes. Ici encore, le problème est en général impossible; autrement dit, l'hypothèse faite au début sur la connexion des sillages suppose quelque chose de particulier dans la disposition des deux plans.

Il existe un cas évident où cette disposition particulière se trouve réalisée, c'est celui où les deux plans sont orthogonaux à la droite joignant leurs milieux. Le mouvement présente alors un axe de symétrie et il en est de même des domaines (f), (Ω) et (t). Il n'y a alors plus que six paramètres $(a, b, c, \beta, \mathrm{K}, \mathrm{a})$; d'autre part, les équations ci-dessus se réduisent à trois, les relations de position à trois également et le problème est alors déterminé. Il serait possible d'en poursuivre la solution, car l'intégrale Ω s'exprimerait dans ce cas par des fonctions elliptiques; mais nous nous bornerons, dans ce qui va suivre, à l'étude d'une disposition encore un peu plus particulière.

Cas où le plan d'avant est très petit. — Lorsque l'un des deux plans

(1) Il ne suffit pas de se donner les coordonnées de l'un de ces deux points et la longueur de la lame, car il faut de plus exprimer que les deux segments ϖ_1 et ϖ_2 sont dans le prolongement l'un de l'autre, comme nous le verrons plus loin dans un cas particulier.

est très petit, c'est nécessairement celui d'avant, et nous obtiendrons cette forme particulière des obstacles en supposant que, dans la formule (86) donnant Ω, a et a' tendent vers zéro. Ω prend alors la forme

$$\Omega = -K\int_{\infty}^{t} \frac{(t-\beta)(t-\beta')}{t^2\sqrt{(t-c')(t-b')(t-b)(t-c)}}\,dt \tag{87}$$

(le radical étant toujours positif pour les grandes valeurs réelles de t).

Il est facile de se rendre compte (ce qui, du reste, était à prévoir) que les conditions géométriques imposées à Ω dans son plan entraînent nécessairement le fait que β et β' doivent tendre aussi vers zéro.

Tout d'abord, le point $t=0$ ne peut pas être un pôle double de l'élément différentiel; en effet, lorsque le point (t) décrit dans son domaine un petit demi-cercle pour éviter le point zéro, le point (Ω) de son côté doit décrire un segment fini de longueur π parallèle à l'axe réel. Or ceci ne saurait avoir lieu pour un pôle double, et nécessairement l'une au moins des deux quantités β, β' doit aussi tendre vers zéro. Mais alors on obtiendra le déplacement en question du point (Ω) en formant la quantité $-i\pi\rho$, ρ étant le résidu relatif au pôle en question, et, d'après la disposition des constantes, ce résidu est réel et il est impossible que le déplacement du point (Ω) ait la valeur réelle π. Le pôle doit donc disparaître complètement et l'intégrale Ω se réduit à la forme très simple suivante :

$$\Omega = -K\int_{\infty}^{t} \frac{dt}{\sqrt{(t-c')(t-b')(t-b)(t-c)}}. \tag{87 bis}$$

L'intégration est alors immédiate; il suffit de poser, comme nous l'avons déjà fait plus haut,

$$t = \frac{1}{2}\frac{p'Z - p'\gamma}{pZ - p\gamma} + \frac{S_1}{4} \qquad (S_1 = c'+b'+b+c,\ 0<\gamma<2\omega_1);$$

Ω devient alors

$$\Omega = -KZ \tag{88}$$

et le domaine (Z) aura la disposition indiquée par la figure 25.

Détermination des constantes. — On devra avoir les quatre condi-

tions

$$\Omega\left(-\frac{\gamma}{2}\right) = +\frac{\pi}{2}, \qquad \Omega\left(-\frac{\gamma}{2}+\omega_1+\omega_3\right) = -\frac{\pi}{2} - a\,i,$$

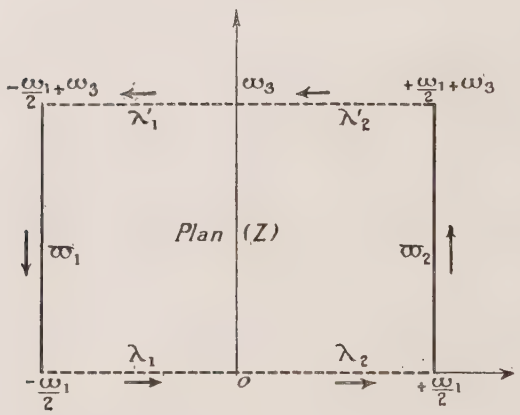
$$\Omega\left(-\frac{\gamma}{2}+\omega_1\right) = -\frac{\pi}{2}, \qquad \Omega\left(-\frac{\gamma}{2}+\omega_3\right) = +\frac{\pi}{2} - a\,i,$$

qui s'écrivent encore

$$K\frac{\gamma}{2} = +\frac{\pi}{2}, \qquad K\left(\frac{\gamma}{2}-\omega_1-\omega_3\right) = -\frac{\pi}{2} - a\,i,$$

$$K\left(\frac{\gamma}{2}-\omega_1\right) = -\frac{\pi}{2}, \qquad K\left(\frac{\gamma}{2}-\omega_3\right) = +\frac{\pi}{2} - a\,i.$$

Fig. 25.



Ces équations se réduisent à trois et l'on en tire immédiatement

$$K = \frac{\pi}{\omega_1}, \qquad \gamma = \omega_1, \qquad a = \frac{\tau}{i}\pi$$

(on voit que la quantité a est bien positive et même que la vitesse le long des lignes λ'_1, λ'_2, qui est égale à e^{-a}, est précisément la quantité q relative aux fonctions elliptiques introduites).

La formule donnant t devient

$$t = \frac{1}{2}\frac{p'Z}{pZ - e_1} + \frac{S_1}{4}$$

et l'on a

$$dt = [pZ - p(Z+\omega_1)]\,dZ,$$

d'où

$$(89) \qquad df = 2t\,dt = 2\left[\frac{1}{2}\frac{\wp' Z}{\wp Z - e_1} + \frac{S_1}{4}\right][\wp Z - \wp(Z+\omega_1)]\,dZ$$

et, par suite,

$$(90) \qquad z = \int e^{-\frac{i\pi Z}{\omega_1}}\left[\frac{\wp' Z}{\wp Z - e_1} + \frac{S_1}{2}\right][\wp Z - \wp(Z+\omega_1)]\,dZ.$$

Cas particulier $S_1 = 0$. — Nous allons étudier, tout d'abord, le cas particulier où S_1 est nul, quitte à démontrer, un peu plus tard, que ce cas est le seul intéressant pour notre objet. Il est facile de voir que ce cas particulier est celui où le mouvement présente un axe de symétrie. En effet, on démontre, dans le calcul classique de l'intégrale Ω (*voir*, par exemple, Appell et Lacour, *Fonctions elliptiques*, p. 254), que l'on a, si le polynome $(t-c')(t-b')(t-b)(t-c)$ est mis sous la forme $t^4 + 4a_1t^3 + 6a_2t^2 + 4a_3t + a_4$:

$$\wp'\gamma = a_3 - 3a_1a_2 + 2a_1^3.$$

Dans le cas qui nous occupe, on a donc à la fois, puisque $\gamma = \omega_1$,

$$a_1 = 0, \qquad a_3 = 0;$$

le polynome $(t-c')(t-b')(t-b)(t-c)$ sera donc bicarré ; on aura $b' = -b$, $c' = -c$, ce qui entraîne la symétrie annoncée.

Le point correspondant à $t = 0$ est alors le point $Z = \omega_3$, et, dans ce cas, l'intégrale z prend la forme plus simple ci-dessous :

$$(91) \qquad z = \int e^{-\frac{i\pi Z}{\omega_1}}[\wp' Z + \wp'(Z+\omega_1)]\,dZ$$

(*voir* T. et M., form. CIII, 9, dans lesquelles on fait $a = Z$, $b = \omega_1$, $c = -\omega_1 - Z$).

Conditions de position provenant du plan (z). — Dans le plan (z), les données du problème sont au nombre de deux : la distance d des deux plans et la longueur l du plan d'arrière.

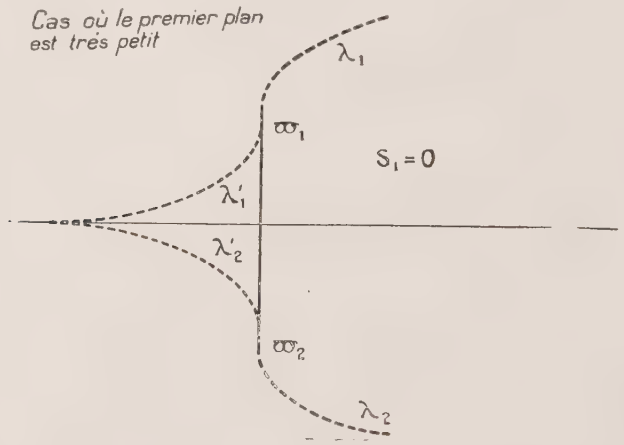
La longueur l s'obtiendra en prenant l'intégrale entre les limites

$-\frac{\omega_1}{2}$ et $+\frac{\omega_1}{2}$ et l'on aura exactement

$$-il=\int_{-\frac{\omega_1}{2}}^{+\frac{\omega_1}{2}} e^{-\frac{i\pi Z}{\omega_1}}[\wp'Z+\wp'(Z+\omega_1)]\,dZ.$$

Or, il est facile de calculer cette intégrale sous forme d'un développement en série, ce qui nous suffira ici (¹). Au moyen de deux

Fig. 26.



intégrations par parties successives, elle se ramène à la forme suivante :

$$-il=-\left[i\wp\frac{\omega_1}{2}\right]2\frac{\eta_1}{\omega_1}\pi+\frac{\pi^2}{\omega_1^2}\int_{-\frac{\omega_1}{2}}^{+\frac{\omega_1}{2}} e^{-\frac{i\pi Z}{\omega_1}}[\zeta Z+\zeta(Z+\omega_1)]\,dZ.$$

Pour effectuer le calcul de l'intégrale $\int_{-\frac{\omega_1}{2}}^{+\frac{\omega_1}{2}} e^{-\frac{i\pi Z}{\omega_1}}\zeta Z\,dZ$ nous choisirons un chemin d'intégration formé des deux segments rectilignes $\left[-\frac{\omega_1}{2},\ -\varepsilon\right]$ et $\left[\varepsilon,\ +\frac{\omega_1}{2}\right]$ reliés par un petit demi-cercle C, de rayon très petit ε contournant le pôle $Z=0$.

(¹) La fonction sous le signe *somme* est une fonction de seconde espèce à multiplicateurs spéciaux dont on ne peut calculer la primitive.

On aura ainsi

$$\int_{-\frac{\omega_1}{2}}^{+\frac{\omega_1}{2}} = \int_{-\frac{\omega_1}{2}}^{\varepsilon} + \int_{C} + \int_{+\varepsilon}^{\frac{\omega_1}{2}}.$$

L'intégrale le long du demi-cercle a pour limite, quand ε tend vers zéro, la quantité $-\pi i$. En réunissant les deux autres intégrales, on met leur somme sous la forme

$$-2i\int_{\varepsilon}^{\frac{\omega_1}{2}} \sin\frac{\pi Z}{\omega_1}\zeta Z\,dZ.$$

Or, sous cette forme, la fonction sous le signe *somme* est régulière à l'origine, et à la limite on aura donc

$$\int_{-\frac{\omega_1}{2}}^{+\frac{\omega_1}{2}} e^{-\frac{i\pi Z}{\omega_1}}\zeta Z\,dZ = -i\pi - 2i\int_{0}^{\frac{\omega_1}{2}} \sin\frac{\pi Z}{\omega_1}\zeta Z\,dZ.$$

Un calcul analogue (un peu plus simple puisqu'il n'y a pas de pôle sur le chemin rectiligne d'intégration) donnera, de même,

$$\int_{-\frac{\omega_1}{2}}^{+\frac{\omega_1}{2}} e^{-\frac{i\pi Z}{\omega_1}}\zeta(Z+\omega_1)\,dZ = \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi} + \int_{-\frac{\omega_1}{2}}^{+\frac{\omega_1}{2}} e^{-\frac{i\pi Z}{\omega_1}}\zeta_1(Z)\,dZ$$

$$= \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi} - 2i\int_{0}^{\frac{\omega_1}{2}} \sin\frac{\pi Z}{\omega_1}\zeta_1(Z)\,dZ;$$

d'où, en définitive,

$$l = 4p\frac{\omega_1}{2} + \frac{\pi^3}{\omega_1^2} + 2\frac{\pi^2}{\omega_1^2}\int_{0}^{\frac{\omega_1}{2}} \sin\frac{\pi Z}{\omega_1}[\zeta Z + \zeta_1 Z]\,dZ.$$

Or, on connaît pour ζZ et $\zeta_1 Z$ des développements en séries trigonométriques très convergents (T. et M., form. CVI, 2) qui donneront, en posant $\frac{\pi Z}{\omega_1} = u$,

$$\zeta Z + \zeta_1 Z = \frac{2\eta_1}{\pi}u + \frac{\pi}{2\omega_1}\left(\cot\frac{u}{2} - \operatorname{tang}\frac{u}{2}\right) + \frac{4\pi}{\omega_1}\sum_{1}^{\infty}\frac{q^{kp}}{1-q^{kp}}\sin 2pu.$$

En multipliant par $\sin u$ et en intégrant terme à terme la série unifor-

mément convergente ainsi formée, on aura

$$\int_0^{\frac{\omega_1}{2}} \sin\frac{\pi Z}{\omega_1}[\zeta Z+\zeta_1 Z]\,dZ=\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}+1+4\sum_1^{\infty}(-1)^{p+1}\frac{2p}{4p^2-1}\frac{q^{4p}}{1-q^{4p}}.$$

D'autre part, on a aussi (T. et M., form. CVI, 3) :

$$\wp\frac{\omega_1}{2}=-\frac{\eta_1}{\omega_1}+\frac{\pi^2}{2\omega_1^2}-2\frac{\pi^2}{\omega_1^2}\sum_1^{\infty}(-1)^p\,2p\,\frac{q^{4p}}{1-q^{4p}};$$

d'où, après quelques réductions faciles,

$$l=\frac{\pi^2}{\omega_1^2}(4+\pi)-64\frac{\pi^2}{\omega_1^2}\sum_1^{\infty}(-1)^p\frac{p^3}{4p^2-1}\frac{q^{4p}}{1-q^{4p}}. \tag{92}$$

La série du second membre est une série alternée, très rapidement convergente pour peu que q soit petit; son terme général, pris en valeur absolue, peut se mettre sous la forme

$$\frac{p^2}{4p^2-1}\frac{pq^{4p}}{1-q^{4p}};$$

or, on vérifie très facilement que les deux facteurs ainsi écrits décroissent à partir de $p=1$. Le terme général lui-même est donc sans cesse décroissant en valeur absolue, et l'on sait que, dans ces conditions, la somme de la série est du signe de son premier terme. Nous en retiendrons la conséquence, dont nous nous servirons un peu plus loin, que l'on a

$$l\geq\frac{\pi^2}{\omega_1^2}(4+\pi), \tag{93}$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu que pour $q=0$.

Un calcul absolument du même genre, que je ne reproduis pas dans le détail, nous donnerait la distance d des deux plans en prenant la partie réelle de l'intégrale

$$\int_{\omega_3}^{\omega_3+\frac{\omega_1}{2}} e^{-\frac{i\pi Z}{\omega_1}}[\wp' Z+\wp'(Z+\omega_1)]\,dZ,$$

ce qui donnerait

$$d = \frac{1}{q}\left[e_1 - 2\frac{\eta_1}{\omega_1} - 4\frac{\pi^2}{\omega_1^2}\sum_1^\infty \frac{1}{4p^2-1}\frac{q^{2p}}{1-q^{4p}}\right]. \tag{94}$$

Calcul de la pression. — Un raisonnement déjà employé nous montrera que la pression exercée sur le plan d'arrière est égale à la résultante de toutes les pressions élémentaires agissant sur le contour $\varpi_2\lambda'_2\lambda'_1\varpi_1$, diminuée des pressions $p_0\,ds$ agissant sur sa face arrière, c'est-à-dire à l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int (1-V^2)\,dz$$

étendue à ce contour.

Le calcul de cette intégrale est identique à celui qui a déjà été fait plusieurs fois et l'on trouve

$$P = \pi \times \text{résidu de l'origine} = \frac{\pi^3}{\omega_1^2}. \tag{95}$$

La pression par unité de surface est alors $\frac{P}{l}$, et l'on voit, immédiatement, qu'elle est toujours inférieure à $\frac{\pi}{4+\pi}$, valeur qu'elle n'atteint que dans le cas limite où q (c'est-à-dire e^{-a}) est nul. Dans ce dernier cas, du reste, il est facile de voir qu'on retrouve la solution classique de Helmholtz pour le plan normal, la plage avant de fluide mort se réduisant à zéro. Si l'on fait varier q de 0 à 1, cette plage se développe de plus en plus et l'on obtient, ici encore, une infinité de mouvements qui sont tous, au fond, des solutions, *du point de vue mathématique*, du problème du plan normal unique, et ces solutions comportent une indétermination à un paramètre, puisqu'on peut choisir q arbitrairement.

De cette théorie, nous retiendrons surtout le fait important suivant, fait qui, s'il est confirmé par l'étude du phénomène réel, est susceptible d'importantes applications pratiques :

Un solide formé de deux plans solidaires admettant le même axe de symétrie, dans lequel le plan avant est très petit par rapport à l'autre, éprouve moins de résistance de la part du fluide que si le plan arrière existait seul.

Cas où S_1 *est différent de zéro.* — Revenons, maintenant, au cas où S_1 n'est pas nul. Dans ce cas, la formule donnant z peut se décomposer en deux parties :

$$z = \int e^{-\frac{i\pi Z}{\omega_1}} [\wp' Z + \wp'(Z+\omega_1)]\, dZ + \frac{S_1}{2} \int e^{-\frac{i\pi Z}{\omega_1}} [\wp Z - \wp(Z+\omega_1)]\, dZ.$$

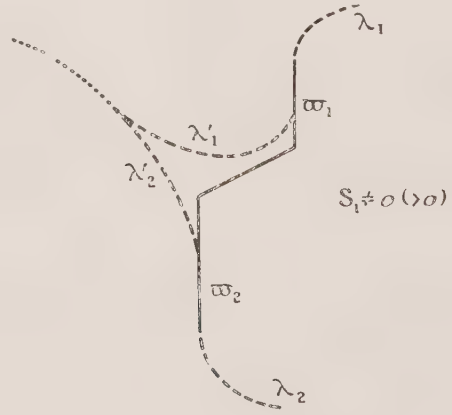
Nous venons d'en étudier la première partie et nous avons vu que, lorsqu'on intégrait de $-\frac{\omega_1}{2}$ à $+\frac{\omega_1}{2}$, sa part contributive était purement imaginaire; nous allons voir qu'au contraire, prise entre les mêmes limites, la seconde intégrale comporte toujours une partie réelle non nulle; autrement dit, qu'il est impossible, dès que S_1 est différent de zéro, de réaliser l'alignement des deux segments ϖ_1 et ϖ_2.

En effet, on a, par un calcul analogue à ceux déjà faits :

$$\int_{-\frac{\omega_1}{2}}^{+\frac{\omega_1}{2}} e^{-\frac{i\pi Z}{\omega_1}} [\wp Z - \wp(Z+\omega_1)]\, dZ = -\frac{\pi^2}{\omega_1^2} - \frac{2\pi}{\omega_1} \int_0^{\frac{\omega_1}{2}} \sin\frac{\pi Z}{\omega_1} [\zeta Z \quad \zeta_1 Z]\, dZ.$$

On pourrait calculer, très facilement, l'intégrale définie du second membre sous forme de développement en série, mais il nous suffit,

Fig. 26 *bis*.



pour notre but, de remarquer que l'élément différentiel en est toujours positif, donc, que l'intégrale du premier membre a une valeur négative, essentiellement différente de zéro.

Nous voyons donc que l'hypothèse $S_1 \neq 0$ correspond, nécessairement, à un obstacle à deux paliers, comme l'indique la figure 26 *bis*. Ce cas, intéressant en lui-même, ne répond pas au problème que nous avions en vue, ainsi que nous l'avions annoncé précédemment.

III. — Étude du mouvement avec deux plans normaux au courant, dans l'hypothèse où l'un des sillages est fermé à l'arrière.

Ainsi donc, les deux hypothèses que nous avons essayées jusqu'à présent nous ont conduits à des résultats analogues. Que l'on tente de traiter le problème avec deux sillages illimités, ou au moyen de lignes de jet allant d'un obstacle à l'autre, les solutions trouvées ne conviennent qu'à des dispositions particulières des deux obstacles. Il ne reste plus qu'une seule hypothèse possible, c'est celle où l'un des deux sillages seul est illimité, l'autre se fermant derrière le plan qui lui a donné naissance. Cette hypothèse d'un sillage fermé se présente du reste comme une conséquence normale des études précédentes. En effet, quand nous avons cherché à réaliser le mouvement avec des lignes de jet s'étendant à l'infini derrière les *deux* obstacles, nous avons vu qu'en général le jet intermédiaire qui se formait n'était pas horizontal. Si on le suppose par exemple ascendant, il vient recouper la ligne λ'_1, créant ainsi une impossibilité physique. En réalité, on conçoit que ce jet se raccordera avec cette ligne λ'_1, en isolant entre elle et lui une certaine masse de fluide inerte à l'arrière de l'obstacle supérieur, masse qui, une fois le régime permanent établi, sera à une pression supérieure à celle qui règne dans le reste du sillage illimité.

Nous prévoyons immédiatement les difficultés nouvelles qui vont se présenter; elles tiendront essentiellement au fait que le domaine du fluide en mouvement ne sera plus simplement connexe et que l'appui de la formule de Schwarz pour la représentation conforme nous fera défaut.

Aussi allons-nous commencer, dans une étude préliminaire, par établir une généralisation de l'intégrale de Schwarz pour les aires doublement connexes limitées par des polygones rectilignes.

Représentation conforme des domaines doublement connexes à contours rectilignes. — Nous allons tout d'abord faire choix d'un domaine type sur lequel nous effectuerons la représentation conforme, domaine qui jouera le même rôle que le demi-plan supérieur de la variable t pour les aires à connexion simple.

Nous considérerons à cet effet une variable complexe v, affixe d'un point variable dans un plan (v). Soit τ une quantité imaginaire pure à coefficient de i positif; nous considérerons la bande du plan (v) comprise entre l'axe L des quantités réelles et la parallèle L′ à cet axe à la distance $+\frac{\tau}{2i}$.

Nous appellerons domaine (V) l'ensemble des points de cette bande indéfinie, *en convenant de ne pas considérer comme distincts deux points dont les affixes ne diffèrent que d'un nombre entier réel.*

Un tel domaine est évidemment doublement connexe, on s'en convainc immédiatement en faisant sur lui la transformation $w = e^{2i\pi v}$. Cette transformation, pour notre point de vue, est biunivoque; en effet, à chaque valeur de v, elle fait correspondre une valeur unique de w, et inversement pour chaque valeur de w les déterminations du logarithme conduisent à des valeurs de v ne différant que par des entiers, valeurs que nous ne regardons pas ici comme distinctes. Or cette transformation fait correspondre à la bande illimitée considérée une couronne circulaire du plan (w), comprise entre les cercles de rayons 1 et q $(q = e^{\tau\pi i} < 1)$.

Ceci posé, nous considérerons un domaine (Z) doublement connexe, compris entre deux polygones rectilignes C et C′, et nous représenterons également chaque point de ce domaine par une affixe imaginaire Z. Soient A_1, A_2, ..., A_n les sommets du polygone C; A'_1, A'_2, ..., A'_p ceux du polygone C′. Nous appellerons $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$, ..., $\alpha_n\pi$, $\alpha'_1\pi$, $\alpha'_2\pi$, ..., $\alpha'_p\pi$ les angles aux sommets de ces polygones, ces angles étant comptés positivement dans l'intérieur du domaine (Z) (les quantités α sont alors toutes comprises entre 0 et 2).

En supposant que le point à l'infini du plan (Z) ne fasse pas partie du domaine (Z) et que C soit le contour extérieur (c'est-à-dire celui qui sépare le domaine de la région du plan contenant le point à l'infini), on vérifie très facilement les deux relations suivantes, qui

expriment des théorèmes élémentaires de géométrie :

$$(96) \qquad \sum_{1}^{n} (\alpha_i - 1) = -2, \qquad \sum_{1}^{p} (\alpha'_i - 1) = +2.$$

Nous savons alors (¹) qu'il existe une fonction analytique $Z = Z(\varphi)$ permettant de réaliser la représentation conforme du domaine (Z) sur le domaine (V), de telle sorte que le contour C corresponde à L, le contour C′ à L′, et que nous pouvons même choisir à l'avance le point de C *ou* de C′ qui sera le correspondant d'un point donné de L *ou* de L′.

C'est de cette fonction $Z(\varphi)$, dont le théorème mentionné ci-dessus affirme seulement l'existence, que nous nous proposons de donner une expression explicite simple.

Remarquons d'abord que cette fonction devra avoir par essence même la période réelle $+1$, puisqu'à des valeurs de φ ne différant que par des entiers devra correspondre un même point du domaine (Z).

Ceci posé, nous considérerons avec Schwarz la fonction

$$(97) \qquad E(\varphi) = \frac{d}{d\varphi} L \frac{dZ}{d\varphi}.$$

Comme pour les domaines à connexion simple, il est facile de voir qu'elle prend des valeurs réelles sur les droites L et L′. Le principe de symétrie de Schwarz permettra alors de la prolonger analytiquement à l'extérieur du domaine (V), en lui attribuant des valeurs imaginaires conjuguées en des points symétriques soit par rapport à L, soit par rapport à L′. Par une application répétée de ce procédé, analogue à la méthode des images, nous prolongerons analytiquement la fonction $E(\varphi)$ dans tout le plan, et il est évident qu'ainsi prolongée elle aura aussi la période τ.

$E(\varphi)$ sera donc une fonction doublement périodique aux périodes 1 et τ.

Soient maintenant $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_p$ les affixes des points

¹) *Cf.* Schotty, *Journal de Crelle*, t. 83, 1877, p. 300.

de L et de L′ correspondant aux sommets des polygones C et C′; ces points seront, comme dans le cas des domaines à connexion simple (ainsi que leurs homologues, *mod.* 1 et τ), des pôles simples de E(v) avec les résidus $\alpha_1 - 1, \ldots, \alpha_n - 1, \alpha'_1 - 1, \ldots, \alpha_p - 1$.

E(v) est donc une fonction elliptique.

Nous poserons encore $v_i = \frac{\tau}{2} + w_i$ et nous considérerons la fonction

$$\sum_1^n (\alpha_i - 1) \frac{\Theta_1(v - v_i)}{\Theta_1(v - w_i)} - \sum_1^p (\alpha'_i - 1) \frac{\Theta_1(v - w'_i)}{\Theta_1(v - w_i)}.$$

On vérifie facilement qu'en vertu de la relation

$$\sum_1^n (\alpha_i - 1) + \sum_1^p (\alpha'_i - 1) = 0,$$

cette fonction est, elle aussi, doublement périodique; d'autre part, elle admet évidemment les mêmes pôles que E(v) avec le même ordre de multiplicité et les mêmes résidus; on sait alors qu'elle n'en diffère que par une constante.

On aura donc

$$(98) \qquad E(v) = \sum_1^n (\alpha_i - 1) \frac{\Theta'_1(v - v_i)}{\Theta_1(v - v_i)} + \sum_1^p (\alpha'_i - 1) \frac{\Theta'_1(v - w'_i)}{\Theta_1(v - w'_i)} + K$$

et la constante K est évidemment réelle, puisque E(v) doit l'être pour les valeurs réelles de v.

De là on tire, par une première intégration,

$$(99) \qquad \frac{dZ}{dv} = H e^{kv} \prod_1^n \Theta_1^{\alpha_i - 1}(v - v_i) \prod_1^p \Theta_1^{\alpha'_i - 1}(v - w'_i).$$

La fonction Z′(v) devant avoir la période + 1, il en est de même de sa dérivée première; ceci entraîne que la constante K doit être nulle, car les deux produits admettent la période 1, le second de toute évidence et le premier en vertu de la relation $\Sigma(\alpha_i - 1) = -2$; quant à la constante H, c'est en général une quantité imaginaire.

Enfin, une seconde intégration donnera

$$Z = Z_0 + H \int_{v_0}^{v} \prod_{1}^{n} \Im_1^{\alpha_i - 1}(v - \varphi_i) \prod_{1}^{p} \Im_1^{\alpha'_i - 1}(v - w_i)\, dv, \tag{100}$$

formule qui présente la plus grande analogie avec l'intégrale de Schwarz et qui peut en être regardée comme une généralisation directe.

Il y a cependant, dans ce cas, une condition supplémentaire à laquelle Z doit satisfaire, c'est d'avoir effectivement la période $+1$, ce qui se traduit par l'équation suivante :

$$\int_{v_0}^{v_0+1} \prod_{1}^{n} \Im_1^{\alpha_i - 1}(v - \varphi_i) \prod_{1}^{p} \Im_1^{\alpha'_i - 1}(v - w_i)\, dv = 0. \tag{101}$$

Cette condition, en général, en contient deux, puisqu'il s'agit de quantités imaginaires (1). Le point v_0 est un point quelconque du domaine (V) et le chemin d'intégration n'est assujetti qu'à n'en pas sortir.

Il est facile de s'assurer que le problème est en général possible dans les conditions mentionnées plus haut. Le nombre des paramètres introduits est en effet de $n + p + 5$ (le module τ des fonctions elliptiques, n paramètres φ_i, p paramètres w_i, quatre provenant des imaginaires Z_0 et H). La détermination de la position et de la grandeur du polygone C (dont les angles sont donnés) fournit $n + 1$ équations; on en obtient de même $p + 1$ pour le polygone C′ et il faut y adjoindre encore les deux équations de condition mentionnées plus haut, soit en tout $n + p + 4$ équations.

Il subsiste donc, comme l'affirmaient les théorèmes d'existence, une indéterminée dans la question. Ceci était du reste à prévoir; en effet, la transformation $v = u + h$ (h constante réelle) transforme le domaine (V) en lui-même et un choix convenable de la quantité h permet d'attribuer à l'une des quantités φ_i ou w_i une valeur donnée à l'avance.

Terminons cette étude en remarquant, comme cela nous sera utile

(1) Nous verrons cependant des cas d'application pratique où cette condition est unique.

plus tard, que la double condition (101) assure en réalité l'uniformité de Z ; elle exprime en effet que, si le point (φ) décrit dans son domaine un chemin fermé non réductible à un point (par exemple un segment rectiligne de longueur 1 parallèle à l'axe réel), le point (Z) décrit dans son domaine un chemin également fermé.

Enfin, toutes les extensions que l'on a pu faire de la formule de Schwarz sont susceptibles de s'appliquer ici (1). En particulier, il peut se faire que le domaine (Z), comme nous le verrons dans les applications, soit porté par une surface de Riemann à deux feuillets par exemple, présentant un ou plusieurs points de ramification (le domaine restant naturellement doublement connexe). On sait alors que ces points de ramification correspondront à des pôles simples de la fonction $E(\varphi)$ avec un résidu égal à 1. Autrement dit, un tel point doit être traité comme un sommet ordinaire (à cela près qu'il n'est pas sur les contours C et C'), en lui attribuant le coefficient $\alpha = 2$. De plus, la fonction $E(\varphi)$ devant être réelle sur l'axe réel du plan (φ), chaque fois qu'il existe *dans* le domaine (Z) un point de ramification correspondant à une valeur imaginaire de φ, on doit introduire aussi comme pôle simple de la fonction avec le même résidu le point imaginaire conjugué, qui correspondra ainsi à un point de ramification de la surface de Riemann *extérieur* au domaine (Z).

Je laisse de côté le cas où le point à l'infini du plan (Z) fait partie *de l'intérieur* du domaine; ce cas est un peu plus complexe et nous n'aurons pas à nous en servir. Mais il peut se faire encore que le point à l'infini fasse partie *du contour* du domaine. Dans ce cas, si l'on appelle β l'angle des deux côtés du polygone qui s'éloignent à l'infini (cet angle étant compté positivement dans l'intérieur du domaine), une simple transformation par inversion ramène ce point à distance finie et l'on voit facilement, par l'étude de la fonction $E(\varphi)$ en son voisinage, qu'il doit être traité comme un sommet ordinaire, avec un résidu égal à $-\beta$.

Dans ces différentes extensions, les deux relations $\Sigma(\alpha_i - 1) = -2$

(1) Pour ces extensions, sur lesquelles je ne donne que quelques indications sommaires, *voir* toujours le Mémoire de Schläfli, auquel j'ai déjà renvoyé plusieurs fois (*Journal de Crelle*, t. 78, 1874, p. 63).

et $\Sigma(\alpha'_i - 1) = +2$ peuvent très bien ne plus être vérifiées; mais on se convainc sans peine que leur somme est encore nulle, à condition d'y ajouter les résidus provenant des infinis et des points de ramification; or cela correspond au fait essentiel et bien connu que la somme des résidus des pôles d'une fonction elliptique situés dans un parallélogramme des périodes est nulle.

Quant à la relation $\Sigma(\alpha_i - 1) = -2$, elle a servi aussi isolément au moment de la détermination de la constante K (*voir* plus haut); si elle n'est plus vérifiée, il peut se faire que la constante K ne soit plus nulle. Ce fait, qui ne se produit que dans des circonstances très spéciales, n'introduit du reste rien d'essentiellement différent dans la théorie; mais cela montre que, si l'on veut étendre la formule donnée à des cas singuliers, il y a lieu de prendre quelques précautions. En tout cas, il est toujours facile, après calculs faits, de vérifier sur la formule trouvée si elle remplit bien les conditions voulues (1).

Retour au problème hydrodynamique. — Cette digression étant close, reprenons le problème avec notre nouvelle hypothèse. Nous supposerons le sillage de l'obstacle inférieur illimité, celui de l'obstacle supérieur se fermant au contraire derrière lui. Nous adopterons *provisoirement* la forme la plus simple pour ce sillage, forme qui comprend nécessairement deux points d'inflexion et un point de rebroussement où se fait le raccord des lignes de courant qui s'étaient momentanément séparées (voir *fig.* 27). La pression qui règnera dans cette région sera supérieure à celle qui règne dans le sillage illimité, le long des lignes de discontinuité qui la limitent la vitesse sera donc constante et aura une valeur inférieure à l'unité, valeur que nous appellerons comme d'habitude e^{-a} $(a > 0)$.

(1) La présente étude a fait l'objet d'une Communication à l'Académie des Sciences dans sa séance du 7 juin 1920; dans le même numéro des *Comptes rendus*, on trouvera une autre solution de cette question présentée par M. H. Villat, basée, dans un esprit tout à fait différent, sur d'ingénieuses considérations d'hydrodynamique, et permettant de réaliser des représentations conformes de domaines doublement connexes limités par des contours curvilignes. De son côté, la méthode que je viens d'exposer, comme je l'ai mentionné dans la Note en question, est susceptible de s'appliquer à des domaines d'ordre de connexion plus élevé.

Quant à la vitesse le long des lignes de glissement s'étendant à l'infini, elle sera naturellement, ici encore, égale à l'unité.

Fig. 27.

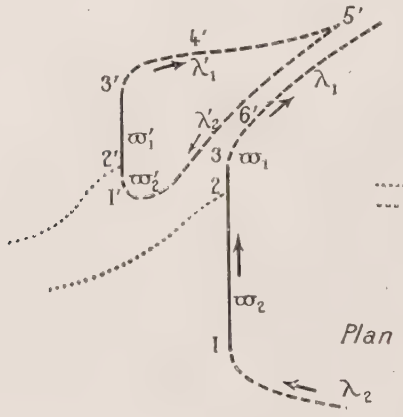
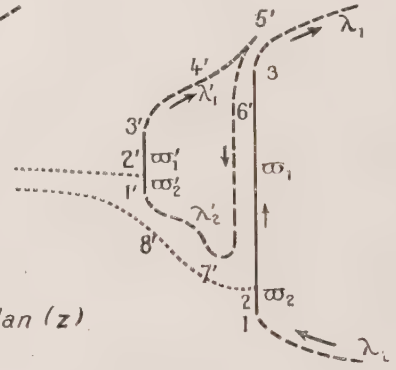


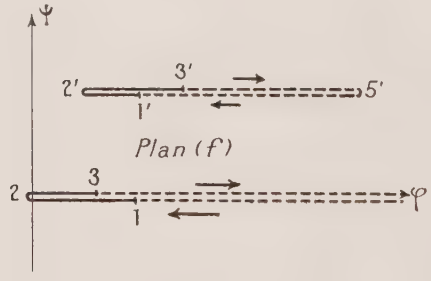
Fig. 27 *bis*.



Plan (z)

Le domaine (f) devra, lui aussi, être doublement connexe, et, *en première analyse*, il se présentera sous la forme du plan entier, entaillé par deux coupures, l'une allant de l'origine à l'infini le long de la partie positive de l'axe des φ, l'autre de longueur finie, parallèle à la

Fig. 28.



première et au-dessus d'elle. Nous représenterons, pour la commodité des notations, les points remarquables des différents domaines par des numéros d'ordre, avec ou sans accent, suivant l'obstacle auquel ils se rapportent, le point à l'infini du sillage illimité ayant le numéro d'ordre zéro.

Le domaine (Ω) est d'allure plus complexe; si le point (z) parcourt

les lignes $\lambda_2 \varpi_2 \varpi_1 \lambda_1$ correspondant au sillage illimité, le point (Ω) décrit dans son plan un contour très simple analogue à ceux que nous

Fig. 29.

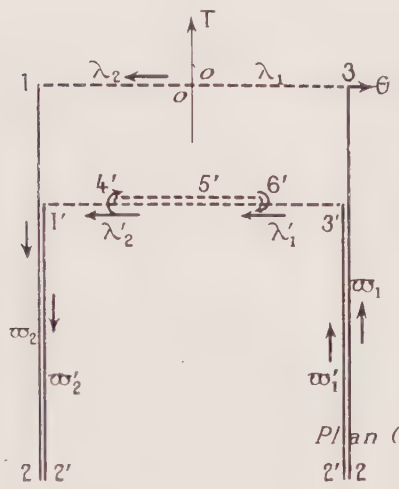
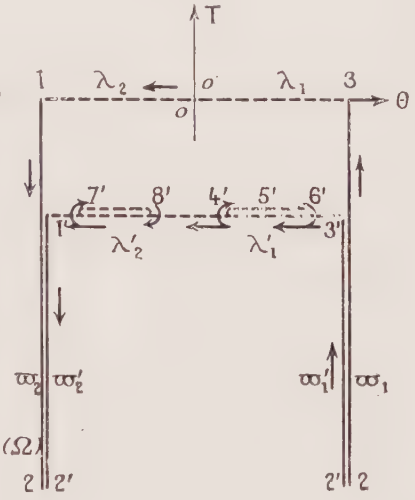


Fig. 29 *bis*.



avons déjà vus souvent ; si maintenant le point (z) décrit le contour $\lambda_2 \varpi_2 \varpi_1 \lambda_1$ du sillage fermé (toujours en laissant à sa gauche le fluide

Fig. 30.

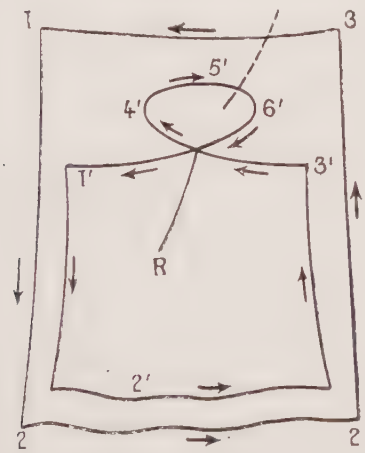
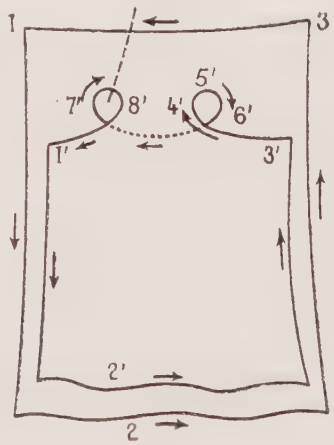


Fig. 30 *bis*.



en mouvement), le point (Ω) décrit une série de parallèles aux axes de coordonnées en suivant le trajet $1' - 2' - 3' - 4' - 5' - 6' - 1'$. Ici

encore, certaines parties du contour se trouvent décrites plusieurs fois et même le segment compris entre les points 4′ et 6′ (qui correspondent aux points d'inflexion) est décrit *trois* fois par le point représentatif (voir *fig.* 29).

Nous sommes donc à nouveau conduits à nous figurer ce domaine comme porté par une surface de Riemann à deux feuillets, et comme nous savons déterminer, en partant des bords, de quel côté se trouve la région intérieure du domaine (Ω), en prolongeant cette détermination de proche en proche, nous arriverons à nous représenter facilement sa forme. Il est formé de deux demi-bandes illimitées vers le bas, l'une (celle du dessous, par exemple) est limitée par le contour $1-2-3-1$ et porte les points $4'$ et $6'$ entre lesquels elle est entaillée par une coupure rectiligne, l'autre porte les points $2'$, $1'$ et $3'$ et se raccorde avec la première par une ligne de croisement partant d'un point de ramification R intérieur au domaine et aboutissant en un endroit quelconque du contour.

J'ai représenté, pour rendre les choses plus claires, sur une figure à part, cette même surface, un peu déformée de façon que l'on puisse mieux juger de son allure générale (voir *fig.* 30).

Il est à peu près évident que le domaine ainsi formé est bien doublement connexe; pour rendre le fait plus immédiat, nous n'avons qu'à remarquer qu'une section transversale le long de la ligne marquée en traits interrompus sur la figure 30 le transformerait en un autre simplement connexe du genre de celui que nous avons rencontré dans une théorie précédente (voir *fig.* 17, p. 46).

Nous avons fait du reste plus haut une hypothèse gratuite en supposant que le contour du sillage fermé ne comportait que deux points d'inflexion; en réalité, nous devons prévoir des dispositions où le nombre de ces points est supérieur à deux. En effet, nous avons vu dans une des études précédentes que, lorsque le plus petit des deux plans venait se placer devant l'autre de façon à former un ensemble symétrique par rapport à la droite joignant leurs milieux, les lignes de jet du premier plan se raccordaient avec le second en isolant entre les deux une plage de fluide inerte. Si, à partir de cette position, nous déplaçons très peu le plan d'avant, de telle sorte que cette symétrie ne soit plus réalisée, l'hypothèse des sillages se raccordant est à rejeter,

un sillage fermé à l'arrière du petit plan devient nécessaire et sa forme, qui doit être voisine de celle du cas symétrique, conduit à un contour de sillage à quatre points d'inflexion (voir *fig. 27 bis*) (1).

La disposition du domaine (Ω) dans ce second cas n'est pas essentiellement différente de celle trouvée précédemment.

Nous remarquerons tout d'abord que, le long de la droite T = — a, il est impossible que le point (Ω) passe deux fois au même endroit en allant *de gauche à droite;* en effet, à partir des deux éléments de bord ainsi constitués en cet endroit, nous serions amenés à prolonger le domaine (Ω) dans deux feuillets différents, *vers le haut*, d'après la règle générale rappelée tout à l'heure. Dans l'un de ces feuillets le domaine s'arrêterait naturellement au contour $\lambda_1\lambda_2$, mais dans l'autre il ne rencontrerait pas de bords, il dépasserait donc l'axe réel et les parties correspondantes du fluide en mouvement seraient animées de vitesses supérieures à l'unité, la pression risquerait d'y devenir négative.

Cette seule raison d'ordre physique suffit pour nous faire exclure de telles configurations, indépendamment de la difficulté qu'il y aurait sans doute à réaliser le domaine doublement connexe avec des feuillets illimités. Autrement dit, les espèces de boucles aplaties que décrit le point (Ω) dans ses va-et-vient sur la droite T = — a *ne doivent pas empiéter les unes sur les autres* (2).

---

(1) Malgré la différence, qui peut paraître profonde, entre le dispositif à sillage fermé et celui que nous avons étudié au Chapitre précédent, il est nécessaire de se rendre compte comment on peut passer de l'un à l'autre de façon continue. Si nous partons, par exemple, du dispositif à sillage fermé de la figure 27 *bis*, nous voyons qu'il existe une veine fluide comprise entre les deux lignes de bifurcation, passant ensuite entre les deux obstacles et s'éloignant enfin à l'infini en s'appuyant à λ_1. Si l'obstacle d'avant tend vers la position symétrique, les deux lignes de courant limitant cette veine se rapprochent l'une de l'autre sur toute leur étendue en la comprimant entre elles jusqu'à la faire disparaître. On se rapproche alors insensiblement du dispositif à sillages raccordés. J'aurai sans doute l'occasion de préciser dans d'autres travaux cette vue sommaire sur laquelle je n'insiste pas davantage ici.

(2) Dans un des Mémoires fondamentaux de cette théorie [*Les surfaces de glissement d'Helmholtz et la résistance des fluides* (*Annales de Physique et de Chimie*, 1911, p. 166)], M. M. Brillouin, étudiant le cas d'un obstacle unique, remarque qu'il ne peut pas y avoir, sur les lignes de discontinuité, de points d'inflexion, car, dit-il, « le point (Ω), dans son plan, doit parcourir l'axe des Θ d'un mouvement continu [sans va-et-vient qui feraient correspondre, sur une certaine étendue, trois points du contour (*z*) à un seul point du

On déduit facilement de cette remarque la forme du domaine (Ω) dans le cas où il y a quatre points d'inflexion. C'est celle qui est représentée par la figure 29 *bis*, et sous une forme schématique par la figure 30 *bis*. On voit aussi qu'il ne doit pas y avoir de points de ramification faisant partie de l'*intérieur* du domaine, car, s'il y en avait, une section transversale allant de 4′ à 8′ transformerait le domaine en une aire à deux trous, ce qui ne saurait se produire pour un domaine doublement connexe. On obtient ainsi en quelque sorte un feuillet percé d'un trou, des bords duquel se détache par une espèce d'isthme une languette formant, en se déployant, le second feuillet. Un tel domaine est de toute évidence doublement connexe.

Enfin, terminons ces remarques générales d'*analysis situs* en montrant en quelques mots que des configurations plus complexes que les deux qui viennent d'être décrites sont impossibles, c'est-à-dire que le nombre des points d'inflexion du contour (Ω) ne peut pas dépasser quatre. Supposons en effet, pour fixer les idées, qu'il y en ait six, cela correspondrait à trois boucles du domaine (Ω) n'empiétant pas les unes sur les autres. On peut toujours supposer, en déformant au besoin la surface, que les points doubles de la figure sont des points doubles effectifs du contour (et non seulement des points doubles apparents). De chacun de ces points partira alors une ligne de croisement des deux feuillets de la surface, et ces lignes de croisement, ou bien se rejoindront entre elles, ou bien se termineront en des points de ramification. Cela nous montre immédiatement que le nombre des points de ramification faisant partie de l'intérieur du domaine est de même parité que le nombre des boucles. Supposons donc ici qu'il y ait trois boucles et un seul point de ramification, comme l'indique la figure 31. On voit tout de suite qu'un tel domaine ne peut être dou-

---

contour (Ω)] ». Cette remarque n'est pas en contradiction avec ce que nous rencontrons ici, mais il serait peut-être bon de la compléter en insistant sur le fait que s'il y avait un tel va-et-vient sur l'axe des Θ, dans le cas d'un obstacle unique, cela impliquerait l'existence de points du domaine (Ω) au-dessus de cet axe, c'est-à-dire de points du fluide où la vitesse dépasserait l'unité et où la pression pourrait devenir négative. Ce mode de raisonnement de M. Brillouin se ramène donc directement à une preuve antérieurement donnée par lui du même fait (*loc. cit.*, p. 150). C'est aussi la même raison qui interdit (sauf dans le cas de M. Villat) les va-et-vient sur les côtés verticaux des domaines (Ω).

blement connexe, car une section transversale le long de la ligne marquée en traits interrompus le transformerait en une aire à deux

Fig. 31.

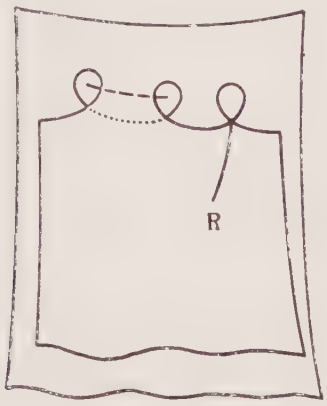
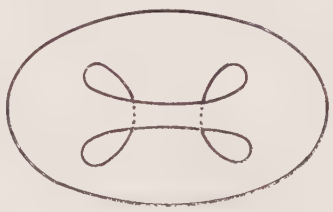


Fig. 31 *bis*.

Domaine homéomorphe à celui de la figure 31.



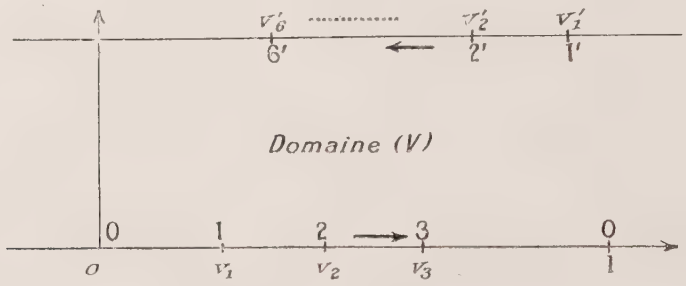
trous. C'est une raison analogue qui limite à un le nombre des points de ramification possibles dans la disposition à deux points d'inflexion. Enfin, on s'assure aussi facilement que des configurations plus complexes sont *a fortiori* impossibles, car on peut, par des sections convenables, détacher des domaines correspondants des aires du type que nous venons d'étudier.

Représentation conforme du domaine (f) *sur un domaine* (V). — Ces formes de nos différents domaines étant ainsi convenablement précisées, nous allons effectuer les diverses représentations conformes nécessaires à notre objet. Nous devons tout d'abord appliquer le plan coupé (f) sur un domaine (V). Nous supposerons que la coupure illimitée $\lambda_2 \varpi_2 \varpi_1 \lambda_1$ corresponde à l'axe réel du plan (φ), et aussi, puisque nous pouvons *a priori* faire choix d'une des valeurs du paramètre, que le point à l'infini de cette coupure ait pour correspondant le point $\varphi = 0$; nous représenterons par $\varphi_i (i = 1, 2, 3)$ les points remarquables de ce contour, et par $\frac{\tau}{2} + \varpi_i (i = 1, 2, \ldots, 6)$ les points remarquables de la droite L′ correspondant au second contour.

Les seuls points à considérer ici sont les points 0, 2, 2′ et 5′ qui sont

des sommets des contours et dont les valeurs de α correspondantes sont respectivement $-2, +2, +2, +2$.

Fig. 3.



La représentation conforme sera donc assurée par la relation

$$f(v) = M\int_{v_2}^{v} \frac{\vartheta_1(v-c_2)\,\vartheta_4(v-w_2)\,\vartheta_4(v-w_3)}{\vartheta_1^3 v}\,dv. \tag{102}$$

La constante M doit avoir une valeur réelle, puisque $f(v)$, et par suite $\frac{df}{dv}$, doivent être réelles en même temps que v.

Exprimons tout de suite le fait que la seconde coupure est parallèle à la première; il faudra pour cela qu'en faisant dans la formule $v = \frac{\tau}{2} + w$, w et $\frac{df}{dv}$ soient réels en même temps. Or un calcul immédiat donne pour cette dérivée la valeur

$$\frac{df\left(\frac{\tau}{2}+w\right)}{dv} = M\frac{\vartheta_4(w-c_2)\,\vartheta_1(w-w_2)\,\vartheta_1(w-w_3)}{\vartheta_1^3 w}\,e^{i\pi(c_2+w_2+w_3+w)}.$$

La condition de réalité imposée entraîne donc la relation suivante :

$$c_2 + w_2 + w_3 = m \tag{103}$$

(m étant un nombre entier quelconque).

Cette condition est dans le cas présent un élément très net de simplification du problème; elle exprime, en effet, que la fonction sous le signe d'intégration admet la période τ (en plus de la période 1 qu'elle a par construction même). On pourrait donc sans difficulté effectuer le calcul sous forme finie de la fonction $f(v)$, mais cela n'est pas néces-

saire pour notre étude, puisque c'est seulement de la différentielle df que nous aurons besoin (¹).

Enfin, la condition d'uniformité de $f(v)$, laissée aussi sous forme non intégrée, s'écrit

$$(10\,4) \qquad \int_0^1 \frac{\Im_4(w - v_2)\,\Im_1(w - w_2)\,\Im_1(w - w_3)}{\Im_1^3 w}\,dw = 0$$

(l'intégrale est évaluée le long du chemin $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\imath$ de façon à éviter le pôle $v = 0$).

Nous remarquerons que, dans ce cas, cette condition est *unique*. Ceci est une particularité qui se présente chaque fois que l'un des contours est formé d'une coupure rectiligne (polygone de deux côtés).

(¹) Afin de donner au moins un exemple simple complètement intégré de la représentation conforme d'une aire polygonale doublement connexe, j'indique rapidement le résultat du calcul.

Pour l'effectuer commodément, nous passerons aux fonctions σ en posant

$$u = 2\omega_1 v, \qquad u_i = 2\omega_1 v_i, \qquad u'_i = \omega_3 + 2\omega_1 w_i \qquad (\omega_1 \text{ quelconque})$$

avec la relation

$$u_2 + u'_2 + u'_3 = 2\omega_3 + 2m\omega_1.$$

On vérifie facilement que, dans ces conditions, la fonction à intégrer prend la forme simple (à un facteur constant près) :

$$\frac{\sigma(u - u'_1)\,\sigma(u - u_2)\,\sigma(u - u_3)}{\sigma^3 u} = -\frac{\sigma^3 u'_2\,\sigma^3 u'_3}{2\sigma(u'_2 - u'_3)} \times \begin{vmatrix} 1 & \wp u & \wp' u \\ 1 & \wp u_2 & \wp' u_2 \\ 1 & \wp u'_3 & \wp' u'_3 \end{vmatrix}$$

(*voir* T. et M., form. CIII, 8).

On obtient alors la fonction $f(v)$ sous la forme

$$f(v) = N \begin{vmatrix} u & -\zeta u & \wp u \\ 1 & \wp u'_2 & \wp' u'_2 \\ 1 & \wp u'_3 & \wp' u'_3 \end{vmatrix} + \text{const.},$$

N étant un nouveau coefficient réel remplaçant M.

La condition d'uniformité impose aux différentes constantes la relation

$$\begin{vmatrix} \omega_1 & -\eta_1 & 0 \\ 1 & \wp u'_2 & \wp' u'_2 \\ 1 & \wp u'_3 & \wp' u'_3 \end{vmatrix} = 0.$$

En effet, lorsque le point (v) décrit dans son plan le contour correspondant, on est certain que le point (f) reste sur cette coupure et, par suite, pour exprimer que le contour qu'il décrit est fermé, il n'y a qu'à écrire que la somme algébrique de ses déplacements est nulle, ce qui ne donne bien qu'une condition. Du reste, dans ce cas, pour déterminer la coupure en grandeur et position, il faut se donner *quatre* conditions (les coordonnées de ses deux extrémités), c'est-à-dire une condition de plus que ne l'indiquerait la formule générale $(n+1)$ appliquée pour $n=2$.

En résumé, il y a donc une condition de position en plus et une condition d'uniformité en moins, si bien que, comme il fallait s'y attendre, le nombre total en reste le même.

Représentation conforme du domaine (Ω) *sur le domaine* (V). — Résolvons le même problème pour le domaine (Ω) en nous plaçant tout d'abord dans le cas où il n'y a que deux points d'inflexion sur le contour du sillage fermé. Ce domaine a alors pour sommets

les points.....	1	2	3	1′	2′	3′	4′	6′
avec les valeurs de α.....	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	2

D'autre part, le domaine comprend à son intérieur un point de ramification R, qui aura pour image un certain point imaginaire du domaine (V) d'affixe $\lambda+\mu\frac{\tau}{2}$ $(0<\mu<1)$; comme nous l'avons rappelé plus haut, nous devons introduire aussi au même titre le point imaginaire conjugué $\lambda-\mu\frac{\tau}{2}$ et ces deux points interviennent de la même façon que des sommets ordinaires, avec un coefficient α égal à 2.

Leur part contributive dans l'intégrale sera donc

$$\vartheta_1\left(v-\lambda-\mu\frac{\tau}{2}\right)\vartheta_1\left(v-\lambda+\mu\frac{\tau}{2}\right).$$

Or, on vérifie immédiatement qu'à un facteur près (facteur constant et réel), ce produit peut encore s'écrire

$$\vartheta_4\left(v-\lambda-\mu'\frac{\tau}{2}\right)\vartheta_4\left(v-\lambda+\mu'\frac{\tau}{2}\right)\qquad(\mu'=1-\mu)$$

et la représentation conforme sera assurée par une relation de la forme

$$\Omega(v)=\Pi\int_0^{v}\frac{\Im_4(v-w_4)\Im_4(v-w_0)\Im_4\left(v-\lambda-\mu'\frac{\tau}{2}\right)\Im_4\left(v-\lambda+\mu'\frac{\tau}{2}\right)}{\Im_1(v-c_2)\Im_4(v-w_2)\sqrt{\Im_1(v-c_1)\Im_1(v-c_3)\Im_4(v-w_1)\Im_4(v-w_3)}}\,dv.$$

Prenons maintenant le cas où le sillage fermé présente quatre points d'inflexion; le domaine (Ω) n'aura alors plus de points de ramification à son intérieur, mais son contour présentera deux sommets de plus, $7'$ et $8'$, correspondant dans le plan (v) à des points d'affixes $\frac{\tau}{2}+a$ et $\frac{\tau}{2}+b$ avec le coefficient $\alpha=2$.

La formule de la représentation sera dans ce cas

$$(105)\qquad \Omega(v)=\Pi\int_0^{v}\frac{\Im_4(v-w_1)\Im_4(v-w_0)\Im_4(v-a)\Im_4(v-b)}{\Im_1(v-c_2)\Im_4(v-w_2)\sqrt{\Im_1(v-c_1)\Im_1(v-c_3)\Im_4(v-w_1)\Im_4(v-w_3)}}\,dv.$$

Nous constatons donc, comme nous l'avions laissé prévoir au début, que ces deux formes ne sont pas essentiellement différentes; nous pouvons conserver la dernière seule et nous obtiendrons les deux cas en supposant a et b *imaginaires conjugués* s'il y a *deux* points d'inflexion; a et b *réels* s'il y en a *quatre* (1).

Pour préciser de façon convenable la valeur de Ω, nous remarquerons que l'on peut toujours supposer ε_1, ε_2, ε_3 compris entre 0 et 1, puisque les ε_i ne sont définis qu'à des entiers près. Le radical est alors réel pour $v=0$; nous prendrons comme détermination initiale celle qui est positive pour cette valeur et nous la suivrons par continuité dans le domaine (V).

Comme Ω doit être une fonction réelle et décroissante quand v varie par valeurs réelles au voisinage de zéro, la constante Π devra être *réelle et positive*.

Détermination des constantes; conditions provenant du plan (Ω). — La façon même dont nous venons de déterminer la réalité de la cons-

(1) Remarquons en passant que les extrémités des coupures (pour lesquelles $\alpha=2$) jouent le rôle de points de ramification situés *sur* le contour.

tante H, nous montre que le point (Ω) commence par décrire l'axe réel $O\Theta$ si v varie par valeurs réelles en partant de o; lorsque le point (v), s'éloignant davantage, traversera les points v_1, v_2, v_3, le point (Ω) décrira donc un contour formé de parallèles aux axes de coordonnées. Il nous faut écrire que les abscisses des côtés verticaux sont égales à $+\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ et aussi que, lorsque le point (v) sera parvenu au point $+1$, le contour se sera fermé.

Pour exprimer ces conditions, nous éviterons le pôle v_2 par un petit demi-cercle γ, de rayon ε très petit, intérieur au domaine. Nous aurons alors, en posant pour abréger l'écriture,

$$\varphi(v) = \frac{\mathrm{H}\,\Im_1(v-w_1)\,\Im_1(v-w_6)\,\Im_1(v-a)\,\Im_1(v-b)}{\Im_1(v-v_2)\,\Im_1(v-w_2)\sqrt{\Im_1(v-v_1)\,\Im_1(v-v_3)\,\Im_1(v-w_1)\,\Im_1(v-w_3)}},$$

les conditions suivantes :

$$(106)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{v_1} \varphi(v)\,dv = -\frac{\pi}{2}, \\ \displaystyle\lim_{\varepsilon=0}\left[\int_{v_1}^{v_2-\varepsilon}\varphi(v)\,dv + \int_{v_2+\varepsilon}^{v_3}\varphi(v)\,dv\right] = 0, \\ \displaystyle\int_{\gamma}\varphi(v)\,dv = +\pi, \\ \displaystyle\int_{v_3}^{1}\varphi(v)\,dv = -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Dans la deuxième de ces formules, la somme des deux intégrales conserve, évidemment, une valeur finie quand ε tend vers zéro. D'autre part, la troisième peut s'écrire sous la forme plus simple :

$$\mathrm{H} = -\frac{\Im_1(v_2-w_1)\,\Im_1(v_2-w_6)\,\Im_1(v_2-a)\,\Im_1(v_2-b)}{\Im_1'(o)\,\Im_1(v_2-w_2)\sqrt{\Im_1(v_2-v_1)\,\Im_1(v_3-v_2)\,\Im_1(v_2-w_1)\,\Im_1(v_2-w_3)}} = +1$$

(rad. arith.).

Ces conditions contiennent donc, *à la fois, celles relatives au premier contour et la double condition d'uniformité.*

Passons, maintenant, aux conditions relatives au second contour. Exprimons, tout de suite, ce qui concerne son orientation. Si nous supposons que le point (v) se déplace de façon à atteindre un point

du contour L' (le point $\frac{\tau}{2}$, par exemple), le point (Ω) devra, après avoir subi un déplacement correspondant, se trouver sur un des côtés du polygone C' (sans que nous puissions savoir lequel *a priori*). Nous en concluons donc que, en posant $v = \frac{\tau}{2} + w$ et en faisant varier w par valeurs réelles au voisinage de zéro, les accroissements de Ω devront être, soit réels, soit imaginaires purs; il en est, alors, de même de sa dérivée, et, par suite, de la fonction $\varphi(v)$.

Or, un calcul facile donne

$$\varphi\left(w+\frac{\tau}{2}\right)=\frac{\mathrm{H}\left\{\begin{array}{l}\vartheta_1(w-w_4)\,\vartheta_1(w-w_6)\\ \quad\times\vartheta_1(w-a)\,\vartheta_1(w-b)\,e^{\pi i\left[w_4+w_6+a+b-v_2-w_2-\frac{1}{2}(w_1+w_3+w_1+w_3)+l\right]}\end{array}\right\}}{\vartheta_4(w-v_2)\,\vartheta_1(w-w_2)\sqrt{\vartheta_4(w-v_1)\,\vartheta_4(w-v_3)\,\vartheta_1(w-w_1)\,\vartheta_1(w-w_3)}}$$

(l = entier)

et la condition d'orientation que nous étudions se traduit par l'équation

$$\left\{\begin{array}{l}2(w_4+w_6+a+b-v_2-w_2)-(v_1+v_3+w_1+w_3)=n\\ (n \text{ entier quelconque}).\end{array}\right. \tag{107}$$

Cette condition étant remplie, le contour C' a, nécessairement, la forme générale imposée par le problème, il n'y a plus qu'à en fixer la grandeur. Ceci se traduit immédiatement par les deux conditions

$$\left\{\begin{array}{ll}\displaystyle\int_0^{\frac{\tau}{2}+w_2}\varphi(v)\,dv=-\frac{\pi}{2}-a\,i,\\ \displaystyle\int_{\gamma'}\varphi(v)\,dv=+\pi,\end{array}\right. \tag{108}$$

la seconde intégrale étant prise suivant un petit demi-cercle γ', de rayon très petit, intérieur au domaine et évitant le pôle $\frac{\tau}{2}+w_2$. Elle est susceptible de s'écrire sous la forme intégrée ci-dessous :

$$\mathrm{H}\frac{\left|\vartheta_1(w_2-w_4)\,\vartheta_1(w_2-w_6)\,\vartheta_1(w_2-a)\,\vartheta_1(w_2-b)\right|}{\vartheta_1'(0)\,\vartheta_4(w_2-v_2)\sqrt{\vartheta_4(w_2-v_1)\,\vartheta_4(w_2-v_3)}\left|\vartheta_1(w_2-w_1)\,\vartheta_1(w_2-w_3)\right|}=+1\ (^1).$$

(1) Les barres de valeurs absolues proviennent du fait qu'on ignore, en général, l'ordre dans lequel se succèdent les quantités w_i.

Quant à la première condition, elle se dédouble, puisque ses deux membres sont des imaginaires. L'égalité des parties réelles est la plus essentielle, celle des parties purement imaginaires ne servant qu'à déterminer la quantité a, c'est-à-dire la vitesse le long des lignes de jet du sillage fermé.

Conditions provenant du plan (z). — Pour achever de déterminer les constantes, il nous faut adjoindre aux conditions déjà trouvées, celles qui proviennent du plan (z) et qui sont de deux sortes.

Nous aurons, d'abord, une *double* condition d'uniformité, représentée par l'équation

$$(109)\qquad \int_{\nu_0}^{\nu_0+1} dz = \mathrm{M}\int_{\nu_0}^{\nu_0+1} e^{i\int_0^{\nu}\varphi'(\nu)\,d\nu}\,\frac{\vartheta_1(\nu-\nu_2)\,\vartheta_4(\nu-\omega_2)\,\vartheta_4(\nu-\omega_5)}{\vartheta_1^3\nu}\,d\nu = 0,$$

puis, ensuite, les conditions de position et de grandeur des deux obstacles, qui sont au nombre de *quatre :* les longueurs des deux plans et les coordonnées de l'une des extrémités de l'un par rapport à l'une des extrémités de l'autre.

Résumé et position générale du problème. — Nous réunirons toutes les formules trouvées dans le Tableau de la page 107.

Nous obtenons donc, en tout, *seize équations*.

D'autre part, les paramètres dont dépend le problème sont au nombre de *quinze :*

Onze valeurs remarquables de ν : ν_1, ν_2, ν_3, ω_1, ..., ω_6, a, b;
Deux constantes multiplicatrices : H et M;
Le module τ des fonctions elliptiques;
La constante de vitesse a.

Ici encore, tout au moins à première vue, le résultat paraît analogue à celui que nous avons déjà rencontré deux fois. Il semble, puisque le nombre des équations est supérieur d'une unité à celui des paramètres, que notre hypothèse du sillage fermé, elle aussi, ne puisse s'accorder qu'avec des dispositions particulières des obstacles.

Il n'en est rien, heureusement, car, sinon, notre champ d'hypothèses paraîtrait épuisé; c'est ce que nous allons voir, en examinant

Solution du problème.

$$dz = e^{i\Omega}\,df = \mathrm{M}\int^{\varphi} e^{\,i\int_0^{\varphi}\varphi(\varphi)\,d\varphi}\,\frac{\vartheta_1(\varphi-\varphi_2)\,\vartheta_4(\varphi-w_2)\,\vartheta_4(\varphi-w_5)}{\vartheta_1^3\varphi}\,d\varphi,$$

$$\varphi(\varphi) = \frac{\mathrm{H}\,\vartheta_4(\varphi-w_4)\,\vartheta_4(\varphi-w_6)\,\vartheta_4(\varphi-a)\,\vartheta_4(\varphi-b)}{\vartheta_1(\varphi-\varphi_2)\,\vartheta_4(\varphi-w_2)\sqrt{\vartheta_1(\varphi-\varphi_1)\,\vartheta_1(\varphi-\varphi_3)\,\vartheta_4(\varphi-w_1)\,\vartheta_4(\varphi-w_3)}}.$$

Condition provenant du contour C et uniformité de Ω.

(I) $$\int_0^{\varphi_1}\varphi(\varphi)\,d\varphi = -\frac{\pi}{2},$$

(II) $$\lim_{\varepsilon=0}\left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_3-\varepsilon}\varphi(\varphi)\,d\varphi + \int_{\varphi_2+\varepsilon}^{\varphi_3}\varphi(\varphi)\,d\varphi\right] = 0,$$

(III) $$\mathrm{H}\,\frac{\vartheta_4(\varphi_2-w_4)\,\vartheta_4(\varphi_2-w_6)\,\vartheta_4(\varphi_2-a)\,\vartheta_4(\varphi_2-b)}{\vartheta_1'(0)\,\vartheta_4(\varphi_2-w_2)\sqrt{\vartheta_1(\varphi_2-\varphi_1)\,\vartheta_1(\varphi_3-\varphi_2)\,\vartheta_4(\varphi_2-w_1)\,\vartheta_4(\varphi_2-w_3)}} = +1,$$

(IV) $$\int_{\varphi_2}^{+1}\varphi(\varphi)\,d\varphi = -\frac{\pi}{2}.$$

Conditions provenant du contour C′.

(V), (VI) $$\int_0^{\frac{\tau}{2}+w_1}\varphi(\varphi)\,d\varphi = -\frac{\pi}{2} - a\,i,$$

(VII) $$\mathrm{H}\,\frac{|\vartheta_1(w_2-w_4)\,\vartheta_1(w_2-w_6)\,\vartheta_1(w_2-a)\,\vartheta_1(w_2-b)|}{\vartheta_1(0)\,\vartheta_4(w_2-w_2)\sqrt{\vartheta_4(w_2-\varphi_1)\,\vartheta_4(w_2-\varphi_3)\,|\vartheta_1(w_2-w_1)\,\vartheta_4(w_2-w_3)|}} = +1,$$

(VIII) $$2(w_4+w_6+a+b-\varphi_2-w_2) - (\varphi_1+\varphi_3+w_1+w_3) = n \quad \text{(entier)}.$$

Conditions provenant du plan (f) et uniformité de f.

(IX) $$\varphi_2+w_3+w_5 = m \quad \text{(entier)},$$

(X) $$\int_0^{1}\frac{\vartheta_4(w-\varphi_2)\,\vartheta_1(w-w_2)\,\vartheta_1(w-w_5)}{\vartheta_4^3 w}\,dw = 0.$$

Conditions provenant du plan (z) et uniformité de z.

(XI), (XII) $$\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+1} e^{\,i\int_0^{\varphi}\varphi(\varphi)\,d\varphi}\,\frac{\vartheta_1(\varphi-\varphi_2)\,\vartheta_4(\varphi-w_2)\,\vartheta_4(\varphi-w_5)}{\vartheta_1^3(\varphi)}\,d\varphi = 0.$$

(XIII), (XIV), (XV), (XVI) { Conditions de position et de grandeur des obstacles.

de plus près une des conditions obtenues, qui se trouve être trop restrictive.

Discussion de la condition d'uniformité de $f(v)$. — L'hypothèse que nous avons faite au début, sur la forme du domaine (f), en le supposant constitué par un plan avec deux coupures, avait pour but essentiel de nous permettre d'appliquer les résultats que nous avions obtenus, relativement à la représentation conforme. Mais il est certain, qu'en général, la réalité est plus complexe. Lorsque le point (z) décrit, dans le domaine du fluide en mouvement, un contour entourant le sillage fermé, le circuit correspondant du point (f) ne se ferme pas nécessairement. En effet, si, après une telle circulation, il est nécessaire que ψ reprenne la même valeur, puisque l'on doit se retrouver sur la même ligne de courant, il peut très bien se faire, au contraire (et c'est même ce qui arrive dans le cas général), que le potentiel des vitesses ne soit pas uniforme. Comme les dérivées partielles de ce potentiel, $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ le sont, elles, certainement, le seul fait qui puisse se produire, est que la fonction φ reprenne la même valeur, augmentée seulement d'une constante réelle.

Si nous suivons les variations du point (f) dans son plan (en supposant, pour fixer les idées, qu'il parte d'un point de la droite correspondant aux deux lignes de courant qui se sont raccordées derrière l'obstacle), après une circulation du point (z) autour du sillage fermé, le point (f) reviendra encore sur cette droite, mais avec un certain décalage horizontal constant, c'est-à-dire indépendant de la position de départ.

Cette droite, prolongement de la coupure finie que nous avions admise précédemment, ne s'introduira donc pas dans le plan (f) comme une coupure proprement dite, mais plutôt comme une sorte de *faille*, le long de laquelle les deux parties du plan qu'elle sépare auraient subi une espèce de glissement.

Or, la chose intéressante pour nous ici, c'est que, si nous négligeons la condition d'uniformité trouvée pour $f(v)$, la formule obtenue

$$f(v) = M \int_{v_2}^{v} \frac{\Im_1(v - v_2)\,\Im_1(v - w_2)\,\Im_1(v - w_3)}{\Im_1^3 v}\, dv$$

nous donne, pour les déplacements du point (f), exactement les particularités que nous venons de décrire.

En effet, après une circulation autour du sillage fermé, circulation qui correspond à un trajet du point (v) le long du segment $[v_0, v_0 + 1]$, la fonction $f(v)$ a subi l'accroissement

$$M\int_{v_0}^{v_0+1} \frac{\Im_1(v-v_2)\,\Im_4(v-w_2)\,\Im_4(v-w_5)}{\Im_1^3 v}\,dv.$$

Cet accroissement est, évidemment, indépendant de v_0, et si, en particulier, on donne à v_0 la valeur $\frac{\tau}{2}$, par exemple, on voit qu'il se réduit à

$$\pm M\int_0^1 \frac{\Im_4(w-v_2)\,\Im_1(w-w_2)\,\Im_1(w-w_5)}{\Im_4^3 w}\,dw,$$

et, par suite, qu'il est réel.

En supprimant donc cette condition surabondante d'uniformité de $f(v)$ (condition X), nous obtenons un système de *quinze* équations pour les *quinze* paramètres. Le problème, avec notre dernière hypothèse, est donc, en général, *possible et déterminé*.

Je montrerai, dans un travail ultérieur, comment, du système des équations précédentes, on peut tirer, par une résolution effective, des exemples de mouvements présentant les propriétés énoncées. Cela m'entraînerait trop loin pour le présent Mémoire.

Je me contenterai de remarquer qu'ici encore, si le plan $\varpi_1'\varpi_2'$ devient très petit, le sillage qu'il a provoqué ne se réduira, sans doute, pas à zéro, et nous retrouverons, comme toujours dans cette étude, des indéterminations nouvelles provenant d'obstacles artificiellement introduits, et, ensuite, réduits à des points.

Remarques générales sur la représentation conforme. — Enfin, je ne voudrais pas terminer cette étude sans mentionner une particularité de la représentation conforme, que j'ai passée sous silence, mais qui s'est présentée chaque fois que nous avons eu un passage à la limite à faire. Ils ont tous été caractérisés par une modification curieuse du domaine (Ω). Prenons, par exemple, le mouvement étudié au Chapitre II de la deuxième Partie (deux plans situés l'un devant l'autre

dans la position symétrique). Lorsque nous avons supposé que le plan d'avant tendait vers zéro, les deux coupures du plan (Ω) (voir *fig.* 24) ont eu une tendance à se rejoindre et à sectionner, ainsi, le domaine en deux parties. A la limite, l'une de ces parties représente, de façon conforme, le domaine du fluide en mouvement; l'autre partie, au contraire (celle qui s'étend indéfiniment vers le bas), correspond à une portion du plan (z) devenue infiniment petite et réduite au voisinage immédiat du point en lequel s'est faite la réduction du plan $\varpi'_1 \varpi'_2$.

En ce point particulier du plan (z), l'échelle de la représentation conforme devient infinie, de telle sorte que les parties du fluide immédiatement voisines du point de bifurcation de la ligne de courant ont pour image une aire du plan (Ω) dont l'étendue est, elle-même, infinie.

Je n'insiste pas davantage sur ces singularités, on vérifiera facilement qu'elles se produisent dans tous les autres exemples de passage à la limite que j'ai donnés et qu'il y a toujours morcellement du domaine (Ω) par *étranglement*, soit parce que des parties du contour tendent à se rejoindre, soit parce que des points de ramification se rapprochent des bords, tendant à séparer des feuillets du domaine.

Conclusion.

En résumé, pour revenir au point de vue des indéterminations, il ressort de cette étude qu'il est possible de former autant que l'on veut de solutions parasites du problème relatif à un obstacle déterminé. Il suffit d'introduire des obstacles nouveaux et de les réduire progressivement à des points. Nous nous sommes bornés, dans ce travail, à un seul obstacle additif, mais, il est évident que rien n'en limite le nombre et que l'indétermination ainsi obtenue est considérable.

Certains des mouvements parasites ainsi formés peuvent être retenus au point de vue physique, comme, par exemple, ceux étudiés dans la première Partie; d'autres, au contraire, comme ceux de la deuxième Partie, paraissent plus invraisemblables et sont plutôt des

solutions mathématiques, et il est évident qu'ils ne se produiront pas spontanément.

Cependant, ces derniers, eux-mêmes, ne sont peut-être pas dénués de toute signification physique, si l'on réfléchit que, dans une expérience réelle, les corps parasites abondent naturellement (parois, boulons d'assemblage, tiges, etc.); il peut très bien se faire qu'ils créent des perturbations notables, quelque effort que l'on fasse pour les réduire, et *peut-être* y a-t-il là une des causes du manque d'homogénéité si fréquent dans les résultats des expériences sur la résistance des fluides?

Vu et approuvé :

Strasbourg, le 8 juin 1921.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

E. BATAILLON.

Vu et permis d'imprimer :

Strasbourg, le 9 juin 1921.

Le Recteur de l'Académie de Strasbourg,

S. CHARLÉTY.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Recherches récentes sur la limite d'établissement des régimes turbulents en Hydrodynamique.

Vu et approuvé :

Strasbourg, le 8 juin 1921.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

E. BATAILLON.

Vu et permis d'imprimer :

Strasbourg, le 9 juin 1921.

Le Recteur de l'Académie de Strasbourg,

S. CHARLÉTY.

65319-21 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
65319 Quai des Grands-Augustins, 55.